



**UNIVERSIDAD  
DE PINAR DEL RÍO**  
HERMANOS SAÍZ MONTES DE OCA

**CENTRO DE ESTUDIOS DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN EN PINAR DEL RÍO**

**FACULTAD DE EDUCACIÓN MEDIA**

**DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

**EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO DESDE LA DISCIPLINA  
ANÁLISIS MATEMÁTICO**

Tesis presentada en opción al Grado Científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas

**AUTOR: MSc. Serdaniel Nieves Pupo**

**Pinar del Río, Cuba**

**2020**

**“Año 62 de la Revolución”**



**UNIVERSIDAD  
DE PINAR DEL RÍO**  
HERMANOS SAÍZ MONTES DE OCA

**CENTRO DE ESTUDIOS DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN EN PINAR DEL RÍO**

**FACULTAD DE EDUCACIÓN MEDIA**

**DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

**EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO DESDE LA DISCIPLINA  
ANÁLISIS MATEMÁTICO**

Tesis presentada en opción al Grado Científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas

**AUTOR: MSc. Serdaniel Nieves Pupo**

**TUTORES: Dr. C. Carlos Manuel Caraballo Carmona**

**Dr. C. Carlos Luis Fernández Peña**

**CONSULTANTE: Dr. C. Rita Alejandra Roldán Inguanzo**

**Pinar del Río, Cuba**

**2020**

**“Año 62 de la Revolución”**

## DEDICATORIA

*Esta obra que ha sido un reto de mucho esfuerzo y sacrificio, la dedico:*

*A la memoria de mi papá Jesús Nieves, por educarme con tanto Amor.*

*A mi mamá Elizabeth Pupo, verdadera mujer virtuosa y trabajadora como pocas.*

*A mis hermanos Rebeca, Lusneidy y Elías, por ser parte de mí.*

*A mis amigos de toda la vida Manolito, Bonne, el Rubio, Luis E. y Yoinier, por todas las aventuras que juntos vivimos desde niños.*

*En especial a una princesa de Dios: Yaneli Lambert, porque en cada línea que escribí hay un pensamiento de Amor hacia ella.*

## AGRADECIMIENTOS

*A mi Señor Jesucristo, porque es la Roca de mi salvación.*

*A mi tutor y querido amigo Carlos M. Caraballo, quien junto a su esposa la Dr. C. Leydis Iglesias Triana, han sido mi familia.*

*A mi tutor y amigo Carlos L. Fernández, por todo el compromiso y esfuerzo que dedicó a esta obra.*

*A mi cotutora Rita, por toda esa confianza que transmite con su excelente profesionalidad.*

*A mi jefa de Dpto. la MSc. Yamila Caridad Páez y compañeros de trabajo, por su apoyo y ayuda incondicional.*

*A mi amigo, el Dr. C. Tomas Castillo, por apoyarme y ocuparse sistemáticamente de mi formación doctoral.*

*A la Dra. C. Marta Álvarez, por todos sus consejos y acertadas sugerencias.*

*A la profesora María Carolina Mora, por la exquisita revisión a esta obra.*

*A la Revolución cubana, por darme la oportunidad de estudiar y superarme.*

## **SÍNTESIS**

El pensamiento matemático avanzado (PMA) es el proceso cognoscitivo que permite al hombre penetrar en la esencia de los objetos matemáticos y descubrir lo nuevo dentro de la complejidad. Contribuir al desarrollo de este tipo de pensamiento desde la enseñanza-aprendizaje de la disciplina Análisis Matemático (AM), resulta imprescindible para la formación integral de los estudiantes durante la formación inicial del profesor de Matemática. En esta tesis se presenta un modelo didáctico que integra elementos del proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador, de la teoría de descomposición genética de conceptos, de la coordinación de registros semióticos y de los mapas conceptuales; estos fundamentan el accionar didáctico del profesor para potenciar, en los estudiantes, las características esenciales del PMA desde la disciplina AM. Para ello, se creó el método genético-constructivo que transita por las fases: activación-motivación, configuración-significatividad y aplicación-creatividad; además, contiene un conjunto acciones a desarrollar por el profesor y los estudiantes. La utilización efectiva de dicho método favorece en los estudiantes la significatividad del contenido, la racionalización del trabajo mental y el control de la actividad matemática. Los resultados de la evaluación del modelo por expertos y su concreción parcial mediante una estrategia metodológica, demuestran que es posible potenciar el desarrollo del PMA en estudiantes de la carrera Licenciatura en Educación Matemática, de la Universidad de Pinar del Río.

## ÍNDICE

INTRODUCCIÓN .....	1
CAPÍTULO I: REFERENTES DEL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO Y SU ESTADO INICIAL, EN LOS ESTUDIANTES DE LA CARRERA LICENCIATURA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD DE PINAR DEL RÍO .....	9
1.1 El pensamiento matemático avanzado como nivel superior del desarrollo del pensamiento matemático.....	9
1.2 Referentes del accionar didáctico para el desarrollo del pensamiento matemático avanzado desde la disciplina Análisis Matemático .....	19
1.2.1 <i>El papel de las representaciones semióticas, como antecedente para el desarrollo del pensamiento matemático avanzado.</i> .....	23
1.2.2 <i>El modelo Acción-Proceso-Objeto-Eschema</i> .....	25
1.2.3 <i>Los mapas conceptuales en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática</i> .....	27
1.3 El proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador, como teoría básica para el desarrollo del pensamiento matemático avanzado.....	28
1.4 El desarrollo del pensamiento matemático avanzado en la formación inicial del profesor de Matemática, desde la disciplina Análisis Matemático .....	33
1.5 Diagnóstico del estado inicial del desarrollo del pensamiento matemático avanzado .....	38
1.5.1 <i>Resultados del diagnóstico inicial del desarrollo del pensamiento matemático avanzado</i> .....	42
CAPÍTULO II. MODELO DIDÁCTICO PARA POTENCIAR EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO DESDE LA DISCIPLINA ANÁLISIS MATEMÁTICO .....	49
2.1 Explicación del proceso de modelación .....	49
2.2 Fundamentos del desarrollo del pensamiento matemático avanzado .....	54
2.3 Caracterización del desarrollo del pensamiento matemático avanzado desde el Análisis Matemático.....	58
2.4 Actividad didáctica para el desarrollo del pensamiento matemático avanzado .....	63
2.4.1 <i>El método genético-constructivo para las clases de Análisis Matemático</i> .....	67
2.4.2 <i>Estructuración didáctica del desarrollo del pensamiento matemático avanzado</i> .....	75
2.5 Formas de implementación y evaluación del modelo didáctico.....	82
CAPÍTULO III: ESTRATEGIA METODOLÓGICA PARA LA IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO. RESULTADOS DEL PROCESO DE VALIDACIÓN .....	85
3.1 Estrategia que instrumenta el modelo didáctico para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático avanzado .....	85
3.1.1 <i>Etapas I: Preparación metodológica</i> .....	86
3.1.2 <i>Etapas II: Intervención práctica</i> .....	90
3.1.3 <i>Etapas III: Evaluación del desarrollo del pensamiento matemático avanzado</i> .....	105

3.2 Validación del modelo. Resultados del proceso de experimentación .....	107
CONCLUSIONES.....	117
RECOMENDACIONES .....	119
BIBLIOGRAFÍA	
ANEXOS	

## **INTRODUCCIÓN**

La Matemática se considera una ciencia altamente estructurada, lo cual permite develar su organización interna y los modos de actuación de los que la desarrollan; quizás por eso ha tenido tanta atención por especialistas e investigadores, en la creencia de que una vez desentrañados los mecanismos del pensamiento matemático, podrían encontrarse aplicaciones pertinentes para otros campos del saber humano.

La finalidad de la carrera Licenciatura en Educación Matemática en Cuba, es formar un profesor capaz de dirigir el proceso pedagógico en general y en particular, el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática (Modelo del profesional, Plan E, p.6). Se requiere formar un profesional de perfil amplio, que pueda enfrentar los problemas más generales y frecuentes que están presentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Uno de los principales objetivos de dicho modelo es “enseñar a formular y resolver problemas, utilizando contenidos de la matemática, sobre la base de la aplicación de procesos de pensamiento”.

Desde cursos anteriores se observan dificultades con el aprendizaje de la Matemática, en las asignaturas de la disciplina Análisis Matemático (AM), en las carreras Licenciatura en Educación Matemática – Física (Plan D) y Licenciatura en Educación Matemática (Plan E) que se evidencian fundamentalmente en el bajo rendimiento académico que presentan los estudiantes en las evaluaciones sistemáticas, trabajos de control parcial y exámenes finales. En el (Anexo 2, Tabla 2.6), se puede observar que desde cursos anteriores, el bajo rendimiento académico (estudiantes con 3 puntos o suspensos) se encuentra por encima del 50 % en el mejor de los casos (AM I) y hasta el 75% (AM III), en las asignaturas de esta disciplina.

De ahí que se haya identificado la existencia de una contradicción entre el bajo rendimiento académico en el aprendizaje de los contenidos de Análisis Matemático y las exigencias del modelo del profesional del Licenciado en Educación Matemática, para satisfacer la demanda social de un profesional altamente calificado.

Por tanto, se realizó un estudio exploratorio inicial para identificar las posibles causas (Anexos 2, 3, 4 y 5). A partir del análisis de los resultados de este estudio, se concluye que los estudiantes presentan insuficientes niveles de abstracción para la comprensión de conceptos propios del AM, dificultad al hacer



## *Introducción*

analogías y transferencias necesarias de las matemáticas elementales a las superiores, así como en la estructuración y organización lógica de saberes para la dirección racional de la actividad matemática relacionada con contenidos de Análisis Matemático.

Las insuficiencias anteriores tienen que ver con los procesos cognitivos-instrumentales como la representación, abstracción, analogías, trasferencias y razonamiento a un nivel superior por la complejidad que implica el aprendizaje de los contenidos de la disciplina AM. De este análisis preliminar se puede afirmar que dichas insuficiencias están muy vinculadas con el desarrollo del *pensamiento matemático*, que integra en sí dichos procesos cognitivos.

Según Artigue (2003), las investigaciones educativas al respecto comienzan señalando al Análisis Matemático como la principal causa del fracaso universitario. La idea anterior se fundamenta en Tall (1995) y Dubinsky (1996), quienes presentaron una clara evidencia de este hecho, advirtiendo que los estudiantes tienen dominio de un cálculo meramente algebraico pero presentan dificultades significativas para conceptualizar los procesos de límite subyacentes en las nociones de derivada e integral.

En la práctica, mediante la experiencia empírica del investigador, se ha podido constatar que lo más difícil para el estudiante es poder ordenar y relacionar sus sistemas de conocimientos y de visualizar relaciones lógicas que tienen en su interior. Lo anterior aporta en gran medida, eficiencia en el proceso de pensar posibles vías de solución durante el trabajo con problemas. Sin embargo, hay ciertas partes del objeto de conocimiento que el estudiante no percibe y si el estudiante no las visualiza, es porque no ha desarrollado la capacidad para “estar consciente” de que esas partes están ahí; entonces, conviene pensar en la influencia que pueda ejercer el desarrollo de la capacidad para visualizar, representar, ordenar, calcular, clasificar y hasta qué punto estos procesos están relacionadas con la formalización del conocimiento matemático.

En Cuesta (2007), también se identifican insuficiencias muy similares a las anteriores:

1. El estudiante no desarrolla la capacidad de utilizar el concepto estudiado de una manera flexible, no puede asociarlo con situaciones conocidas o problemas que forman parte de sus experiencias personales (dificultades con la trasferencia del conocimiento).

2. Las ideas y conceptos que el estudiante intenta aprender, no son satisfactoriamente acomodadas; es decir, surgen aspectos conflictivos entre dos componentes: por una parte, las imágenes mentales del estudiante y por otra, las nuevas definiciones formales de los conceptos matemáticos, objeto de aprendizaje.

Por insuficiencias similares a las antes descritas, Azcárate y Camacho (2003) afirman que “[...] es en el seno del congreso del PME (Psychology of Mathematics Education) en 1985, cuando se forma un grupo de trabajo cuyo objetivo era estudiar la naturaleza del llamado *pensamiento matemático avanzado*” (p.135). Este se crea con el objetivo de profundizar en las teorías y modelos cognitivos acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje del Análisis Matemático. Por tanto, dada la estrecha relación del pensamiento matemático avanzado con las insuficiencias anteriores, en lo adelante se asume el término como eje central de esta investigación.

Es de notable interés para muchos investigadores en Didáctica de la Matemática, comprender dónde radican las causas que provocan las dificultades del aprendizaje en los estudiantes y particularmente de las matemáticas superiores; para ello se han desarrollado múltiples investigaciones, marcos teóricos locales, metodologías, entre otras.

El pensamiento matemático avanzado ha sido abordado por reconocidos investigadores como Vinner (1991), Tall (1995), Duval (1999), Azcárate y Camacho (2003), Cantoral (2006), Radford (2006); Asunción (2012), Aldana (2013), Blanco (2013), Herlina (2015), Cantoral (2016), entre otros, los cuales han aportado desde la teoría de representaciones semióticas, de la descomposición genética de conceptos y la construcción social del conocimiento matemático.

En Cuba se reconocen las investigaciones de Campistrous (1993), Hernández (1995), Delgado (1999), Jiménez (2000); Montenegro (2004), Montalvo (2012), Urrutia (2012), Barreto (2014), Duvergel (2014), Travieso (2017), entre otros, que en sus investigaciones han aportado desde la enseñanza de la lógica matemática, la teoría de nodos cognitivos, la organización del conocimiento, la utilización de mapas conceptuales, el desarrollo de habilidades lógicas y competencias, así como la resolución de problemas.

## *Introducción*

De la sistematización teórica realizada también se pudo constatar que existe una limitada concepción didáctica y metodológica para el PEA (Proceso de Enseñanza-Aprendizaje) de los contenidos del AM, que deje la necesaria claridad sobre las vías para potenciar el nivel de abstracción para la comprensión de conceptos del AM, la significatividad del aprendizaje desarrollador de contenidos con paso al límite y el desarrollo de habilidades lógicas.

Así, aparece ante la comunidad pedagógica cubana el insuficiente tratamiento metodológico al proceso de desarrollo del PMA. Por la complejidad que entraña abordar esta temática y la multitud de aristas susceptibles de ser investigadas, se considera oportuno formular el siguiente **problema científico**: ¿cómo potenciar el desarrollo del pensamiento matemático avanzado, que permita mejoras en el rendimiento académico de los estudiantes en la disciplina Análisis Matemático, de la carrera Licenciatura en Educación Matemática, en la Universidad de Pinar del Río?

En el problema científico se identifica como **objeto de investigación**: el desarrollo del pensamiento matemático avanzado. Para transformar el objeto y dar respuesta al problema, se planteó el siguiente **objetivo**: elaborar un modelo didáctico que potencie el desarrollo del pensamiento matemático avanzado, en los estudiantes de la carrera de Licenciatura en Educación Matemática, durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina Análisis Matemático.

Para el logro del objetivo trazado, se acometieron las siguientes **preguntas científicas y tareas de investigación**:

1. ¿Cuáles son los referentes teóricos que sirven de base al estudio del desarrollo del pensamiento matemático avanzado, en estudiantes de la carrera Licenciatura en Educación Matemática?
2. ¿Cuál es el estado inicial del desarrollo del pensamiento matemático avanzado, en estudiantes de la carrera Licenciatura en Educación Matemática, en la Universidad de Pinar del Río?
3. ¿Cuáles componentes y relaciones deben caracterizar la elaboración de un modelo didáctico que potencie el desarrollo del pensamiento matemático avanzado, en los estudiantes de la carrera de Licenciatura en Educación Matemática, durante el PEA de la disciplina AM?

## *Introducción*

4. ¿Cuál será la validez del modelo elaborado para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático avanzado, en estudiantes de la carrera Licenciatura en Educación Matemática, en la Universidad de Pinar del Río?

Con el objetivo de dar respuesta a dichas preguntas científicas, se formulan las siguientes tareas de investigación.

1. Sistematización de los referentes teóricos que sirven de base al estudio del desarrollo del pensamiento matemático avanzado, en estudiantes de la carrera Licenciatura en Educación Matemática.
2. Caracterización del estado inicial del desarrollo del pensamiento matemático avanzado, en estudiantes de la carrera Licenciatura en Educación Matemática, en la Universidad de Pinar del Río.
3. Determinación de los componentes y relaciones para un modelo didáctico que potencie el desarrollo del pensamiento matemático avanzado, en los estudiantes de la carrera de Licenciatura en Educación Matemática, durante el PEA del Análisis Matemático.
4. Elaboración de la estrategia para la implementación práctica del modelo didáctico.
5. Validación del modelo didáctico elaborado para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático avanzado, en los estudiantes de la carrera Licenciatura en Educación Matemática, en la Universidad de Pinar del Río.

Con el fin de dar solución a las tareas planteadas anteriormente, se emplearon como **métodos de investigación** los siguientes:

Como base metodológica, está la teoría Dialéctico-Materialista para el estudio de los enfoques sobre el desarrollo del PMA y su relación con el PEA desarrollador de la Matemática y en particular de la disciplina AM; para la determinación de los componentes y relaciones dialécticas de un modelo didáctico que permita potenciar el desarrollo del PMA, así como su validación en la práctica. En consecuencia, se utilizaron los siguientes métodos de investigación:

### **Del nivel teórico**

**Análisis histórico-lógico:** se empleó para estudiar la dinámica, trayectoria y lógica objetiva del desarrollo del PMA desde el proceso de enseñanza-aprendizaje del Análisis Matemático, en estudiantes de la carrera Licenciatura en Educación Matemática y determinar sus referentes.

**Sistematización:** se empleó en la búsqueda de referentes teóricos sobre el desarrollo del pensamiento matemático avanzado, en el establecimiento de relaciones entre conocimientos científicos en el tema y en la determinación de dimensiones e indicadores a partir del trabajo con las definiciones.

**Hipotético-deductivo:** se aplicó en la construcción de supuestos hipotéticos y en la determinación de regularidades y características esenciales del desarrollo del PMA, desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina Análisis Matemático.

**Modelación:** se utilizó para lograr una simplificación y representación lo suficientemente clara del desarrollo del PMA, que permitió la reproducción de las cualidades, relaciones y funciones de los componentes fundamentales de su estructura.

**Sistémico-estructural funcional:** se utilizó en la estructuración de los componentes, las funciones y las relaciones que se establecen, tanto en el modelo didáctico como en la estrategia metodológica, con el fin de obtener una adecuada representación del desarrollo del PMA, desde la disciplina AM.

### **Del nivel empírico**

**Análisis documental:** se realizó una revisión de la normativa cubana vigente en relación con la formación del profesor de Matemática, haciendo énfasis en la dirección del PEA de la disciplina AM, así como en la estructuración del contenido. También se revisaron los exámenes parciales, registros de evaluaciones y cuadernos de notas de los estudiantes, para valorar la estructuración de las actividades matemáticas, así como las calificaciones obtenidas.

## *Introducción*

**Observación científica:** se aplicó en la etapa de diagnóstico y en el proceso de validación, para comprobar cómo desde las clases de AM se potencia el desarrollo del PMA, así como para controlar y monitorear la introducción de la estrategia.

**Encuesta:** se empleó en profesores de la disciplina AM, para determinar sus opiniones y valoraciones sobre el desarrollo del PMA.

**Entrevista:** se aplicó a profesores para obtener información sobre el nivel de conocimiento científico-metodológico que estos tienen para potenciar, desde la didáctica, el desarrollo del PMA y a los estudiantes para conocer sus creencias y concepciones relacionadas con el desarrollo de las características esenciales del PMA.

**Prueba pedagógica:** se aplicó de forma interactiva, para evaluar los indicadores del desarrollo del PMA, según las respuestas de los estudiantes a tareas matemáticas, donde necesariamente deben emplear habilidades asociadas a este tipo de pensamiento.

**Criterio de expertos:** se utilizó para obtener una valoración empírica sobre la pertinencia del modelo didáctico para potenciar el desarrollo del PMA y de la estrategia metodológica para concretar el modelo en la disciplina AM, en la carrera Licenciatura en Educación Matemática.

**Experimental:** en su variante pre-experimento, para validar el modelo didáctico propuesto, a partir de su implementación en la práctica escolar.

**Métodos estadísticos:** se utilizan el análisis de frecuencia en la presentación de resultados con tablas y gráficos, el trabajo con los índices para reducir la información a un valor real. De la estadística inferencial se utilizó la prueba de signos para muestras relacionadas y la prueba binomial de una muestra para evaluar la significatividad de los cambios en los indicadores del PMA y de la nota final de la asignatura AM I.

Con esta investigación se contribuye desde el punto de vista **teórico** al perfeccionamiento de la Didáctica de la Matemática Superior, en particular a la de la disciplina AM en la formación inicial del profesor de Matemática. En este sentido se aporta:

## *Introducción*

- ✓ Un modelo didáctico para potenciar el desarrollo del PMA desde la disciplina AM, el cual articula de manera sistémica el trabajo con la representación en esquemas, la visualización lógica y la creatividad matemática.
- ✓ El método genético-constructivo como un nuevo método productivo para el PEA desarrollador de los contenidos de la disciplina AM, que deviene en un conjunto de acciones que integra el trabajo con descomposiciones genéticas de conceptos, la coordinación de registros semióticos y la utilización de mapas conceptuales.
- ✓ La sistematización y contextualización de las teorías referidas a la coordinación de registros semióticos, a la descomposición genética de conceptos y a la utilización de mapas conceptuales para el PEA desarrollador de los contenidos de la disciplina AM.

El **aporte práctico** de la investigación se concreta en la estrategia metodológica que permitirá implementar el modelo didáctico para potenciar el desarrollo del PMA, a partir del trabajo con la representación en esquemas, la visualización lógica y la creatividad matemática y en consecuencia, elevar la calidad del aprendizaje de los contenidos de la disciplina AM y el desarrollo de habilidades matemáticas.

La **novedad científica** de la investigación se manifiesta en la integración, mediante un modelo didáctico, de las teorías sobre descomposición genética de conceptos, coordinación de registros semióticos y mapas conceptuales, con un enfoque desarrollador y en la introducción práctica del método genético-constructivo, como recurso didáctico para potenciar el desarrollo del PMA en los estudiantes.

La tesis está conformada por la introducción, tres capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y anexos. El primer capítulo está dedicado a los antecedentes y referentes teóricos que sirven de base al estudio del desarrollo del PMA, así como al diagnóstico del estado inicial; en el segundo, se presenta el modelo didáctico y en el tercero, se presentan la estrategia metodológica y la experimentación pedagógica, con los resultados obtenidos.

## **CAPÍTULO I**

**REFERENTES DEL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO Y SU ESTADO INICIAL, EN LOS ESTUDIANTES DE LA CARRERA LICENCIATURA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD DE PINAR DEL RÍO**



## **CAPÍTULO I: REFERENTES DEL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO Y SU ESTADO INICIAL, EN LOS ESTUDIANTES DE LA CARRERA LICENCIATURA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD DE PINAR DEL RÍO**

En este capítulo se presenta una sistematización de los referentes teóricos relacionados con el pensamiento humano y su desarrollo, desde la Filosofía, la Psicología y la Lógica, así como las formas de su expresión en el campo de la Matemática y en particular en el PEA de la disciplina AM con un enfoque desarrollador. Por último, se define y operacionaliza el desarrollo del PMA y se caracteriza su estado inicial.

### **1.1 El pensamiento matemático avanzado como nivel superior del desarrollo del pensamiento matemático**

El materialismo dialéctico establece una estrecha relación entre psique, conocimiento, pensamiento, conciencia e idea. En virtud de dicha relación, el *pensamiento* según Lenin (1986) es:

[...] el reflejo de la naturaleza por el hombre (...) el proceso de una serie de abstracciones, la formación y el desarrollo de conceptos, leyes, etc., y estos abarcan condicionalmente, aproximadamente, la regularidad universal de la naturaleza en eterno desarrollo y movimiento (...) mediante el pensamiento el hombre puede captar = reflejar = representar la naturaleza, pero no como un todo en su integridad o totalidad inmediata; solo puede acercarse eternamente a ello. (p.161)

Desde esta posición, el *pensamiento* como proceso cognitivo ha sido definido por Rubinstein (1966), Petrovski (1985), Vigotsky (1987) y González et al. (1995) y según este último “[...] es el proceso cognoscitivo que está dirigido a la búsqueda de lo esencialmente nuevo, y constituye el reflejo mediato y generalizado de la realidad” (p. 173).

El descubrimiento de lo esencial de objetos y fenómenos de la realidad enriquece el contenido concreto del pensamiento. Dicho descubrimiento es resultado de la realización de procesos de análisis y síntesis, abstracción, comparación, generalización, analogías, transferencias, la formulación de hipótesis, la formulación de problemas y el encontrar su solución, entre otros. Como resultado de dicha actividad mental,

## Capítulo I

el individuo obtiene un conocimiento generalizado, conceptual, de las cosas del mundo material objetivo y adquiere conciencia de ello como resultado de un proceso de pensamiento.

Sobre la definición del *pensamiento como proceso*, Rubinstein (1966) plantea que:

[...] se piensa por medio de conceptos. *El proceso de pensar constituye, a la vez, un movimiento de conocimientos*. Ello es, precisamente, lo que da contenido al pensamiento. No se trata, como es notorio, de excluir del examen los frutos de la actividad mental sino de estudiarlos como expresión resultante de un proceso” (p.39); (...) dicho proceso es, ante todo, un *análisis* y una *síntesis* de lo que este nos proporciona; es, además, una *abstracción* y una *generalización*, derivadas de aquellos. (p.40)

El valor cognoscitivo del análisis se debe a que *descompone* y destaca lo *esencial*, en este caso el análisis se convierte en *abstracción*, que según Rubinstein (1966) “[...] la *abstracción* constituye también una forma específica de *análisis* (...). El carácter analítico estriba en que destaca lo esencial y lo separa de lo que no lo es” (p.47). En este caso el análisis va de la realidad concreta y no diferenciada de lo percibido a la separación del todo en sus partes, mediante abstracción y comparación, de rasgos o elementos esenciales y no esenciales.

La *comparación* y la *generalización* también constituyen procesos del pensamiento y al respecto, Rubinstein (1966) plantea que:

[...] la comparación es un análisis que se realiza por medio de una síntesis y que lleva a una generalización, a una nueva síntesis. La comparación es la forma concreta en que síntesis y análisis se hallan vinculados de modo que gracias a ella se llega a la generalización empírica y a la clasificación de fenómenos (...). La síntesis se da cuando se pasa de la abstracción al restablecimiento mental de lo concreto como totalidad analizada. (p. 48-49)

El conocimiento presupone la generalización obtenida como resultado del análisis y de la abstracción. Para llegar a la generalización teórica se parte de las generalizaciones empíricas, surgidas como fruto de la realización de comparaciones entre distintos objetos, destacando solo las características comunes. En este

## Capítulo I

camino se asciende de lo particular a lo general y constituyen el fundamento de la inducción elevada al rango de método básico del saber científico. Como resultados, se obtienen conocimientos conceptuales generalizados y abstractos que reflejan con más exactitud la realidad que los adquiridos con la percepción.

Sobre las relación existente entra la Psicología y la Lógica respecto al pensamiento, Rubinstein (1965) afirma que “(...). Cuando el hombre piensa, en el proceso de desenvolvimiento individual, *la estructura lógica del objeto del pensamiento* determina la *ordenación del pensar* y con ello *la lógica de los pensamientos*” (p.71).

Entre las leyes fundamentales de la Lógica se encuentran, según Jiménez (2010):

[...] *La ley de identidad* que plantea que en el proceso de pensamiento todo concepto o proposición es igual a sí mismo; *la ley de no contradicción*, que plantea que dos juicios contradictorios no pueden ser verdaderos al mismo tiempo; *la ley del tercero excluido* que manifiesta que si dos juicios son contradictorios, uno es verdadero y el otro es falso. (p.16)

Sobre la lógica del pensamiento Newman (1968), declara “[...] tanto la *lógica simbólica* como la *lógica tradicional* se refieren a los *principios generales del razonamiento*, ambas utilizan símbolos. Pero mientras que la lógica tradicional utiliza los familiares símbolos fonéticos del lenguaje conocidos por *palabras*, la *lógica simbólica* usa un conjunto de signos especialmente contruidos (*ideogramas*) que simbolizan directamente la cosa de que se habla” (p.240)

El proceso de formación de la estructura lógica del pensamiento está estrechamente vinculado al desenvolvimiento del lenguaje durante la apropiación de conocimientos. Al respecto, Rubinstein (1964), plantea que:

[...] Cuando se asimila un sistema elemental de conocimientos que incluyen en sí la lógica objetiva del correspondiente objeto, se forma en el hombre una estructura lógica del pensar que sirve de premisa interna necesaria para la asimilación de un sistema de conocimientos de orden más elevado. (p.72)

## Capítulo I

Desde el punto de vista de la Lógica como ciencia, en el proceso del pensar se resuelve el problema de la cognición de la realidad, al determinar la naturaleza de los fenómenos estudiados por medio de los *conceptos*, los *juicios* y los *razonamientos*.

El *concepto*, según Mederos O., Roldán, Mederos, B. y Kakes (2014), se define como:

[...] un par  $(E, C)$ , donde por  $E$  se indica la extensión del concepto y por  $C$  se denota su contenido; es decir, un conjunto de modelos de propiedades esenciales del objeto,  $\{P_i\}_{i \in I}$  ( $I$  es un conjunto), cuyo cumplimiento es suficiente para determinar si un objeto dado pertenece o no a la extensión del objeto. (p.25)

Los conceptos ya formados y desarrollados facilitan la formación de nuevos conceptos, además los conceptos permiten estructurar adecuada y significativamente los conocimientos que se deben aprender, para ampliar, reorganizar, corregir, etc., las estructuras conceptuales que ya posee el estudiante.

Según Jiménez (2010), el *juicio* es:

[...] la forma del pensamiento abstracto en que se afirma o se niega algo respecto a la existencia de objetos, las relaciones entre un objeto y sus propiedades o las relaciones entre objetos (...) y la *proposición* es la expresión en un lenguaje formalizado o mediante una oración enunciativa de un juicio que es necesariamente verdadera o falsa. (p.11); (...) el *razonamiento* es una forma de pensamiento mediante la cual se obtiene una nueva proposición a partir de otras ya conocidas, pueden ser deductivos o inductivos. (p.16)

El razonamiento lo forma una secuencia de ideas que se inducen o se deducen unas de otras. Cuando dicha secuencia es irrefutable se denomina razonamiento lógico, cuyo significado proviene de la palabra griega "logos", que significa razón, pensamiento. Generalmente el razonamiento lógico se identifica con el razonamiento matemático.

Campistrous (1993), plantea que el desarrollo del pensamiento está asociado al dominio de los procedimientos lógicos relacionados con las *formas lógicas del pensamiento*:

## Capítulo I

- ✓ *Conceptos*: definir, aislar propiedades, asociar propiedades, distinguir propiedades, identificar conceptos, clasificar, ejemplificar, deducir propiedades.
- ✓ *Juicios*: determinar valor de verdad, transformar juicios, modificar juicios.
- ✓ *Razonamientos*: realizar inferencias inmediatas, deducción, refutación, demostración directa, demostración indirecta, argumentación.

El pensamiento aparece siempre ligado a una modalidad específica de actividad y cada tipo específico de actividad, transmite al pensamiento peculiaridades distintas; cabe suponer que si la actividad mental y el desarrollo del pensamiento se efectúan en una ciencia en particular, por ejemplo, en la Matemática, se manifiesta lo que podría llamarse *pensamiento matemático*.

Asunción (2012), entiende el *pensamiento matemático* como parte de un ambiente científico, en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la solución de tareas. Además, observa que el pensamiento matemático incluye por un lado, pensamiento sobre tópicos matemáticos y por otro, procesos avanzados del pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento bajo hipótesis. Según Cantoral (2016), el término *pensamiento matemático* se refiere a la “[...] diversidad de formas en que piensan las personas que se interesan por identificar, caracterizar, o modelar conceptos y procesos propiamente matemáticos en ámbitos diversos” (59).

### *El desarrollo del pensamiento.*

Según el Diccionario de Filosofía “[...] el desarrollo es el movimiento hacia lo mejor, su significado está estrechamente ligado con el concepto de progreso, su sinónimo más próximo es evolución (...) perfección creciente y deseable, incremento de valor sobre lo precedente” (Abbagnano, 1963, p. 956).

El desarrollo del pensamiento hay que verlo a partir de los cambios cualitativos ocurridos en los distintos periodos de desarrollo biológico y psíquico y la influencia del medio sobre el sujeto. El estudio de los aspectos que caracterizan el desarrollo del pensamiento puede realizarse mediante el análisis del propio proceso y de sus resultados.

## *Capítulo I*

Según Shardacov (1978), la evolución del pensamiento en los estudiantes se manifiesta en:

- ✓ El desarrollo cualitativo y en las modificaciones del pensamiento formado por las imágenes, elementos prácticos y el componente conceptual teórico.
- ✓ En las variaciones que, en función del contenido del pensamiento, del nivel de desarrollo y de la enseñanza, experimentan las formas de relación de las imágenes, elementos prácticos y el componente teórico.
- ✓ El perfeccionamiento de las formas de pensar: el análisis, la síntesis, la inducción, el concepto, la clasificación y la sistematización, etc.
- ✓ En la formación de hábitos de la actividad mental.
- ✓ En el desarrollo de la propia comprensión de los procesos de pensamiento y en la organización de su manifestación hacia un fin determinado.
- ✓ El incremento de una asimilación cada vez más amplia, más hábil de los conocimientos, así como en el control de sus comportamientos en el estudio, en el trabajo y en la vida social sobre la base de la moral en formación. (p.22)

En relación con la evolución del pensamiento desde la Matemática, García y Fernández (1998), señalan tres niveles: el primero, es un pensamiento informal, conjeturas y validaciones que ayuden al estudiante a darse cuenta de que la Matemática tiene sentido y de la importancia del pensamiento crítico y del espíritu inquisitivo. El segundo, pasa de un pensamiento concreto a un pensamiento más formal y abstracto, que suele llamarse razonamiento inductivo. Mientras que en el tercero, se destaca la formulación de hipótesis mediante un razonamiento inductivo y su verificación posterior mediante los datos obtenidos.

En este último nivel ya hay un raciocinio teórico de conceptos abstractos que le permite al sujeto realizar reflexiones basadas en conceptos y elaborar hipótesis con juicios enunciados verbalmente, los cuales se pueden comprobar y demostrar a través de procesos deductivos.

En el tercer nivel es importante aclarar que aunque no es posible establecer claramente una distinción entre la Matemática que pudiera llamarse elemental (objeto de estudio en la Enseñanza General) y la

avanzada (objeto de estudio en la Educación Superior, por ejemplo el Análisis Matemático), las últimas se distinguen por la complejidad de los contenidos y por la forma de controlar su enseñanza y aprendizaje.

Para describir el *desarrollo del pensamiento matemático*, Cantoral (2016) afirma que:

[...] tendríamos que considerar que este suele interpretarse de distintas formas; por un lado se le entiende como una reflexión espontánea que los matemáticos realizan sobre la naturaleza de su conocimiento y sobre la naturaleza del proceso de descubrimiento e invención en matemáticas. Por otra, se entiende el pensamiento matemático como parte de un ambiente científico en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la resolución de tareas; finalmente, una tercera visión considera que el pensamiento matemático se desarrolla entre todos los seres humanos al enfrentar cotidianamente múltiples tareas. (p. 60-61)

Dentro del campo del pensamiento matemático, reconocidos investigadores como Tall y Vinner (1981), Dreyfus (1990), Azcárate y Camacho (2003), Cantoral (2006), D'Amore (2006), Duval (2006), Carmona y Nidia (2010), Castro (2012), Aldana (2013), Godino (2013), Herlina (2015) y Cantoral (2016), entre otros, han realizado investigaciones relacionadas con el *Pensamiento Matemático Avanzado* (PMA), describiéndolo en términos de procesos cognitivos y prácticas sociales asociadas a la construcción del conocimiento matemático superior.

Para hacer referencia al término (PMA), Azcárate y Camacho (2003), ponen de manifiesto que el *pensamiento matemático avanzado* posee, por su naturaleza, procesos característicos entre los que destacan *el nivel de abstracción, la formalización del conocimiento, la representación, la definición de los conceptos y la demostración*. Según Aldana (2013), el PMA “[...] tiene que ver con los procesos mentales propios de las matemáticas superiores que se enseñan y se aprenden en los últimos años de bachillerato y en especial en el ámbito universitario” (p.58).

Luego de hacer un análisis de varias caracterizaciones sobre el desarrollo del *pensamiento matemático avanzado*, dadas por expertos e investigadores en el tema, Herlina (2015), plantea que “[...] es el proceso del pensar matemático que comprende procesos de representación, abstracción, pensamiento matemático

creativo y la prueba matemática” (p.2). En esta definición se expresa el pensamiento matemático avanzado como un conjunto de procesos cognitivos, que intervienen en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

Respecto a las investigaciones relacionadas con el PMA en la década del noventa del siglo pasado, Cantoral (2016) afirma que “[...] se enfatizaba el problema del pasaje de *la imagen mental* de una noción entre los estudiantes, a la constitución de una *definición conceptual* de naturaleza formal, susceptible de operaciones al nivel simbólico” (p.37).

A partir del análisis de la bibliografía sistematizada sobre el PMA, se reconoce que este tipo de pensamiento por su naturaleza posee características esenciales entre las que se destacan el *nivel de abstracción*, la *formalización del conocimiento*, la *representación*, la *definición de conceptos* y la *demonstración matemática*. A continuación se describen dichas características.

### *El nivel de abstracción*

La abstracción es un proceso del pensamiento que se presenta con dos formas netamente distintas en los polos de la actividad cognoscitiva. La primera forma y elemental se da a nivel sensorial, que según Rubinstein (1966) “[...] consiste en separar unas propiedades del objeto percibido por medio de los sentidos y diferenciar otras” (p.50).

La segunda forma corresponde al pensar abstracto, o sea, es abstracción sobre abstracción; es a lo que Piaget nombra *abstracción reflexiva*. Al respecto, Rubinstein (1966), plantea que “[...] este tipo de abstracción no constituye una mera selección de propiedades del fenómeno dadas directamente, sino que, además, las transforma” (p.51).

De lo anterior se puede afirmar que los razonamientos matemáticos están muy relacionados con el proceso de abstracción reflexiva y este permite penetrar en sistemas de conceptos para determinar lo esencial y obviar lo no esencial durante el desarrollo de actividades matemáticas. Por tanto, en esta tesis, se define el *nivel de abstracción* como *la medida en que se priorizan las cualidades esenciales y se obvian las no esenciales del objeto, proceso o fenómeno, durante la comprensión y formalización de conocimientos*.



## Capítulo I

En el estudiante, se manifiesta en la capacidad de determinar lo esencial en los análisis que realiza durante el desarrollo de actividades matemáticas, en el nivel de coherencia de sus argumentaciones, en el control y en la regulación de su actividad cognoscitiva, así como en el nivel de precisión para formalizar ideas matemáticas.

### *La definición de conceptos*

Según List et al. (2002), una *definición* es:

- a) una proposición que establece lo que es un objeto, cómo surge o cómo se le reconoce; b) una regla que fija cómo se debe emplear un signo lingüístico; c) una proposición o regla que establece o fija lo que significa o debe significar un signo lingüístico. (p.17)

En esta investigación se concuerda con Vinner (1991), cuando asume la definición conceptual como aquella secuencia de palabras que explican el concepto y cuya precisión varía desde las definiciones formales, aceptadas por la comunidad científica, hasta definiciones personales que se utilizan para construir o reconstruir la definición formal.

El proceso de definición de conceptos adquiere notable importancia en la didáctica del Análisis Matemático; al respecto, Azcárate y Camacho (2003), afirman que “[...] las definiciones desempeñan un papel muy importante en la realización de tareas cognitivas y, por consiguiente, en la formación de los esquemas conceptuales” (p.142). En este sentido, las definiciones son de gran utilidad para las demostraciones pues organizadas en esquemas, contribuyen a la dirección lógica y racional de la actividad matemática.

### *La formalización del conocimiento*

La formalización es un resultado del pensamiento que implica la abstracción y está muy relacionada con el proceso de definición. Se interpreta como un recurso que se utiliza para conocer y describir los fenómenos y procesos, además es la expresión matemática de estos, así lo refiere Organista (2008). La formalización del conocimiento en Matemática, es la expresión simbólica que se utiliza para exteriorizar las ideas o razonamientos sobre un determinado contenido.

## Capítulo I

Por tanto, se puede decir que la definición de conceptos es un caso particular de la formalización del conocimiento, o sea, se formaliza el conocimiento cuando se definen conceptos; es decir, cuando se hacen oficiales a través de expresiones simbólicas, las demostraciones de teoremas o cuando se transforma un razonamiento del lenguaje común al lenguaje técnico de la Matemática.

### *La representación conceptual*

Las representaciones son las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada notación, mediante las que se expresan los conceptos y los procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes. Entre las representaciones, se diferencian las internas (mentales) y las externas. Las representaciones mentales actúan como la interiorización de las representaciones externas.

Dentro de investigaciones realizadas en el campo del PMA, se considera que cuando un sujeto escucha o ve el nombre de un concepto, algo es evocado en la memoria. Aquello que se evoca no es la definición del concepto sino lo que Tall y Vinner (1981), llaman *concept image* y definen como:

[...] es algo no-verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Puede ser una representación visual del concepto en el caso que el concepto tenga representaciones visuales; también puede ser una colección de impresiones o experiencias. Las representaciones visuales, las figuras mentales, las impresiones y las experiencias asociadas con el nombre del concepto pueden ser traducidas verbalmente. Pero es importante recordar que las expresiones verbales no son la primera cosa evocada en nuestra memoria. Aparecen en una fase posterior. Por ejemplo, cuando escuchamos la palabra *mesa*, una figura de una cierta mesa puede evocarse en nuestra mente (...). Cuando escuchas la palabra *función*, por otra parte, puedes evocar la expresión  $y = f(x)$ , puedes visualizar la gráfica de una función, puedes pensar en funciones específicas tales como  $y = x^2$ ,  $y = \operatorname{sen} x$ ,  $y = \ln x$ , etc. (p.160)

A partir de las ideas anteriores, se puede afirmar que es de gran importancia el accionar didáctico del profesor intencionado a formar un adecuado *concept image* en los estudiantes, a partir del trabajo con

diferentes registros de representación semiótica y la realización de las funciones de tratamiento y conversión, lo cual permitirá potenciar la significatividad en la apropiación de conocimientos.

#### *La demostración matemática*

En términos matemáticos, se considera que una demostración consiste en una serie de pasos lógicos, deducidos unos de otros en orden encadenado, de manera que el último eslabón es justamente la afirmación que se quiere probar. El procedimiento algorítmico para determinar el valor de verdad de una proposición, se llama demostrar.

Según Ballester et al. (2007), dado un sistema de axiomas  $X$ :

“[...] una demostración de un teorema  $H_0$  es una sucesión finita de proposiciones  $H_1, H_2, H_3 \dots H_n$ , donde  $H_0$  se satisface para cada término  $H_i$  una de las siguientes condiciones:

1.  $H_i \in X$ , ó
2.  $H_i$  puede obtenerse a partir de proposiciones verdaderas precedentes o de expresiones contenidas en  $X$ , utilizando reglas de inferencia lógica”. (p.321)

Sobre la importancia que se le concede a las demostraciones en el desarrollo de la Matemática, Alcolea (2002), describe que lo importante no es cómo los matemáticos demuestran teoremas o cómo hacen que la Matemática progrese, sino cómo hacen que progrese la comprensión humana de la Matemática. Además refiere que no se cuestiona el papel de la demostración en la validación, pero reconoce que su mayor valor radica en la comunicación de ideas y en la generación de la comprensión. Dicho autor concibe la demostración como una cadena finita de deducciones lógicas formales.

### **1.2 Referentes del accionar didáctico para el desarrollo del pensamiento matemático avanzado desde la disciplina Análisis Matemático**

Sobre las contribuciones didácticas al desarrollo del pensamiento matemático se destacan, entre otros, los aportes de Rubinstein (1966), en su obra *El proceso del pensamiento*; el texto ofrece una introducción didáctica sobre las esencias del pensamiento y su manifestación durante la resolución de problemas; Junk (1982), en sus conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática, destaca la aplicación de

## Capítulo I

la teoría de Galperin y describe cinco niveles de desarrollo del pensamiento matemático que transitan por el trabajo elemental con números, sus operaciones, el trabajo con variables, el álgebra de los números reales y el álgebra abstracta. (p.34)

En la obra compilada por Batista (2003), en el epígrafe 2.5 de J. Zilberstein y M. Oramas, se reflexiona acerca de la inteligencia y la creatividad, además se realiza una breve descripción de estrategias para el desarrollo de estas, las cuales están muy relacionadas con el desarrollo del pensamiento y siguen tres direcciones básicas: *enseñar a pensar*, se refiere a la enseñanza de operaciones del pensamiento; *enseñar acerca del pensar*, los estudiantes deben meditar y concientizar cómo ocurre u opera su pensamiento y *enseñar para pensar*, se le otorga un papel al contenido como objeto de asimilación por parte del estudiante. Posteriormente, en la obra citada, se describen algunos proyectos o programas, como los siguientes:

*Proyecto enseñar a pensar*, Inglaterra y Venezuela, por Edward De Bono, 1976. Se propuso enseñar habilidades de pensamiento mediante herramientas creadas al efecto, a utilizarse paralelamente al proceso docente, con el fin de dirigir la atención a los diferentes aspectos del pensamiento (p.116).

*Proyecto aprender a pensar*, Venezuela, 1981. Adoptó la metodología de Edward De Bono y consiste en lecciones que comprenden las series: toma de decisiones, interacción, creatividad, información y patrones del pensamiento, durante tres cursos (p. 117).

*Proyecto aprender a aprender*, Cuba, Instituto Central de Ciencias Pedagógicas, 1985. Se dirigió a propiciar o reforzar el desarrollo de habilidades intelectuales en estudiantes de cuarto grado, tales como: observación, descripción, análisis, síntesis y comparación, mediante actividades extracurriculares (p.117).

*Proyecto ARGOS*, Cuba, Instituto Central de Ciencias Pedagógicas, 1991-1996. Se dirigió a estimular el desarrollo de la inteligencia, la creatividad y el talento, mediante diferentes actividades y programas. Trabajó en la identificación de potencialidades y en el trabajo del maestro mediante el método científico (p.18).

## Capítulo I

*Proyecto Cubano TEDI*, Instituto Central de Ciencias Pedagógicas, 1991-1997. Desarrolla el pensamiento lógico, el pensamiento dialéctico y la independencia cognoscitiva, unido al desarrollo de sentimientos y la formación de valores, a partir de un conjunto de principios didácticos, una concepción didáctica y un conjunto de técnicas que estimulan el desarrollo intelectual (p.118).

También se reconocen los resultados del *proyecto EUCLIDES*, Pinar del Río, 1989-2002. Dirigido a promover el desarrollo del talento y las potencialidades matemáticas en los estudiantes de la Enseñanza General Media, para mejorar los resultados en concursos y olimpiadas de Matemática.

Aunque cada uno de los proyectos y programas mencionados anteriormente fueron desarrollados para estudiantes de las enseñanzas inferiores, no caben dudas de que son precedentes importantes para el desarrollo del PMA desde la disciplina AM, en la formación inicial del profesor de Matemática.

En Cuba se reconoce la investigación realizada por Jiménez (2000), quien desarrolla una propuesta didáctica para mejorar la referencia y la aplicación de los saberes del Análisis Matemático en la formación de profesores; Montenegro (2004), propone un modelo didáctico y una estrategia para la estructuración de habilidades lógicas a través del Análisis Matemático; Urrutia (2012), desarrolla una propuesta didáctica para contribuir al desarrollo de competencias afines al perfil del profesional de Licenciatura en Ciencia de la Computación desde el Análisis Matemático, entre otros.

Es importante resaltar que los proyectos e investigaciones anteriores destacan el papel de la formulación y resolución de problemas para el desarrollo del pensamiento. Una contribución importante desde esta perspectiva es el método de G. Polya; inspiradas en este, aparecen múltiples propuestas dentro de las que se destacan la de Müller (sin fecha), Jungk (1982), Schoenfeld (1985), Santos (1994), Campistrout y Rizo (1999), Cruz (2002), entre otros. En particular Schoenfeld (1985), documentó aspectos relacionados con el empleo de estrategias heurísticas, la naturaleza del pensamiento matemático, las creencias de los estudiantes y la relevancia de las estrategias metacognitivas en la resolución de problemas.

## Capítulo I

Por la importancia que se le confiere a la resolución de problemas para el desarrollo del pensamiento, en esta investigación se asume la definición dada por Campistrous y Rizo (1997), quienes plantean que un problema es:

[...] toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarla.

Se añade como condición que la vía de pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer realizar la transformación. (p.9)

En la Didáctica de la Matemática en Cuba, formular y resolver problemas constituye una línea directriz de la Enseñanza de la Matemática. Los documentos metodológicos cubanos conceptualizan el término *formular y resolver problemas en sentido amplio*, en tanto trasciende al trabajo con *conceptos y definiciones; teoremas y demostraciones; formulación y resolución problemas rutinarios* (ejercicios con textos y de aplicación).

Para la dirección de la enseñanza y el aprendizaje reviste gran importancia el Programa Heurístico General, el cual puede enfocarse tanto desde el punto de vista del docente (direccional) o de los estudiantes (orienta) en el proceso general de resolución de un problema matemático (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014, p.123). Este programa reproduce la lógica misma de este proceso, por medio de una secuencia de acciones delimitadas por cuatro fases principales, que se describen a continuación:

- ✓ *Orientación hacia el problema*: búsqueda del problema o motivación, planteamiento del problema, comprensión del problema, reformulación.
- ✓ *Trabajo en el problema*: análisis y precisión, búsqueda de la idea de solución.
- ✓ *Solución del problema*: realización del plan de solución, representación de la solución.
- ✓ *Evaluación de la solución y de la vía*: comprobación de la solución, determinación de posibles vías de solución, memorización de la ganancia de información metodológica, consideraciones perspectivas.

### 1.2.1 El papel de las representaciones semióticas, como antecedente para el desarrollo del pensamiento matemático avanzado.

Según Distéfano, Aznar, y Pochulu (2019), el significado de un símbolo está ligado a tres elementos: la identificación, la sintaxis y la semántica. La identificación es la primera acción que un sujeto puede realizar en relación con un símbolo al conectarlo con su referente. La sintaxis y la semántica, constituyen dos ramas de *la semiótica* y referencian la lógica y el significado de los símbolos.

De acuerdo con Duval (2004), *los registros de representación semiótica* son el medio que permite a un sujeto exteriorizar o comunicar sus representaciones mentales. Como ejemplo de tales registros para el Análisis Matemático se tienen el *registro verbal* (lenguaje natural), el *registro numérico*, el *registro algebraico*, y el *registro gráfico*. En este caso, los objetos matemáticos se expresan y se materializan en alguno de los registros anteriores.

Las *funciones semióticas* se tornan relevantes en el proceso mediante el cual los estudiantes crean un significado, vinculando una expresión con un contenido. Estas se definen, según D'Amore y Godino (2007), como “[...] una correspondencia (relaciones de dependencia o función) entre un antecedente (expresión, significante o representante) y un consecuente (contenido, significado o representado) establecida por un sujeto de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia” (p.209).

Además, según los autores citados anteriormente, “[...] la *función semiótica* surge cuando entre dos objetos se establece una dependencia representacional o instrumental, donde uno de los objetos se pone en el lugar del otro o bien uno es usado por otro” (p.210). A la transformación de una representación de un objeto sin cambiar de registro se le denomina *función de tratamiento* y si se cambia de registro, se le llama *función de conversión*; es decir, un tratamiento se logra al transformar información en un mismo registro, mientras que en una conversión, la información se transforma de uno a otro registro.

Es importante señalar que, por lo general, al expresar ideas matemáticas es necesario articular varios registros, por ejemplo: “ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$  es convergente”, en este caso se conjugan lo algebraico y lo verbal para representar una proposición. Luego, también se puede hablar de una *función de complemento*, que

no es más que la articulación de registros para expresar ideas. En esta tesis dicha función se considera de gran importancia para el proceso de significación y es necesaria para el trabajo con las funciones de *tratamiento y conversión* abordadas anteriormente.

Las actividades matemáticas, según Duval (1999), ocurren cuando se realizan transformaciones sobre los registros de representación. Estas representaciones externas como enunciados en lenguaje natural, fórmulas algebraicas, gráficos, entre otros, permiten a los estudiantes exteriorizar sus representaciones mentales y lograr que los objetos matemáticos se tornen accesibles. El éxito de la realización de este movimiento entre registros, es un indicador del logro del aprendizaje sobre objetos matemáticos en estudio.

En cuanto a la importancia de las representaciones semióticas en el estudio del pensamiento matemático, es referenciada por muchos investigadores lo que R. Duval llama *paradoja cognitiva del pensamiento matemático*, que D' Amore et al. (2015) traduce como “[...] por un lado, la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una aprehensión conceptual y, por otro lado, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos (...)” (p.180).

La idea anterior resalta la importancia de que los estudiantes no confundan el objeto matemático con su representante. En este sentido es necesario conocer que la relación gnoseológica entre *imagen y objeto* desde la concepción materialista, según Rubinstein (1965), queda formulada en la siguiente tesis:

[...] la imagen del objeto es una *forma del reflejo de la existencia de las cosas*; es una forma ideal, es decir, reflejada en el sujeto, en su cerebro. Esto significa que *la imagen del objeto no es el objeto en sí mismo, ni es tampoco el signo del objeto, sino su reflejo.* (p.54)

El paso de la representación de un objeto matemático a otra por medio de transformaciones, conserva de una parte el significado del objeto mismo, pero puede en ocasiones cambiar su sentido. Mediante una adecuada coordinación entre registros, se logra potenciar el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes. De acuerdo con estas consideraciones teóricas, para la construcción de conceptos matemáticos no basta trabajar las actividades dentro de un solo sistema de representación, sino también realizar las tareas de conversión de una representación a otra.



### 1.2.2 El modelo Acción-Proceso-Objeto-Esquema

La teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema), es un modelo cognitivo basado en una interpretación de la teoría constructivista, que surge como intento de comprender el mecanismo de la *abstracción reflexiva*, introducida por Piaget y que en (Rubinstein, 1966, p.51) se identifica con la *abstracción científica*. Es como decir *abstracción sobre abstracción*, *abstracción compleja* o *avanzada*, para diferenciarla de la *abstracción sensorial*.

Dubinsky (1996), extiende esta idea para describir cómo un individuo logra ciertas construcciones mentales sobre un determinado concepto o noción matemática en niveles más avanzados. Según este autor, el concepto de *abstracción reflexiva* puede ser una poderosa herramienta en el estudio del *pensamiento matemático avanzado*, para proporcionar una base teórica que apoye y contribuya a la comprensión de qué es y cómo se puede ayudar a los estudiantes a desarrollar la capacidad de participar en ello.

Esta teoría describe las estructuras y los mecanismos mentales con los que un individuo puede llegar a construir un concepto o noción matemática. Desde esta perspectiva, el conocimiento matemático se describe en términos de estructuras que son motivadas por mecanismos mentales, desarrollados por el individuo. Por estructura mental se entiende cualquier sistema relativamente estable construido en la mente, que sea capaz de desarrollarse y que es utilizado por el individuo para dar sentido a una situación matemática. La fuente de una estructura mental es la descripción de la cual ella se origina. En este sentido, el mecanismo mental es el medio, por el cual una estructura puede desarrollarse en la mente de un individuo o de un grupo de individuos.

En la teoría APOE, el desarrollo de la comprensión comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales previamente contruidos para formar acciones, las acciones se interiorizan para formar procesos, los que a su vez se encapsulan para formar objetos. Se debe hacer notar que en muchas operaciones matemáticas, es necesario desencapsular un objeto y trabajar con el proceso del cual proviene. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas.

## Capítulo I

En este modelo, las estructuras mentales son construidas y conectadas por medio de mecanismos, de manera que pueden ser organizadas y estructuradas en marcos coherentes, o sea, en esquemas. Estos son usados por los individuos para resolver un problema y pueden ser tematizados para dar lugar a un nuevo objeto, sobre el que es posible aplicar acciones e iniciar la construcción de nuevos esquemas.

Para la descripción sobre el desarrollo de un esquema a partir de la teoría APOE, se han adoptado los siguientes niveles (Aldana, 2013, p.65):

- ✓ *Nivel intra:* cuando el estudiante entiende un objeto matemático pero no establece relaciones lógicas entre otros elementos matemáticos, porque los visualiza de manera aislada y muestra concepciones erróneas en la utilización de algunas características esenciales de dicho objeto.
- ✓ *Nivel inter:* en este, el estudiante comienza a establecer relaciones lógicas entre elementos matemáticos, especialmente los nexos lógicos entre los elementos al cambiar de sistema de representación. Además, aparecen los primeros comienzos de coordinación entre los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.
- ✓ *Nivel trans:* cuando el estudiante es capaz de establecer varias relaciones lógicas (conjunción, condicional y contrario de la condicional) entre los elementos matemáticos gráficos, algebraicos y analíticos, utiliza los elementos necesarios en la resolución de las tareas al usar significados implícitos para tomar decisiones y establece una coordinación entre los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.

Las abstracciones reflexivas utilizadas para realizar las construcciones cognitivas se denominan mecanismos y han sido caracterizadas de la siguiente forma (Aldana, 2013, p.65):

- ✓ *interiorización:* es la construcción mental de un proceso que tiene que ver con una serie de acciones sobre objetos cognitivos. Las acciones se interiorizan en procesos.
- ✓ *coordinación:* es el acto cognitivo de manipular dos o más procesos u objetos matemáticos y utilizarlos para construir un nuevo proceso.

## Capítulo I

- ✓ *inversión*: una vez que el proceso existe internamente, al sujeto le es posible invertirlo, en el sentido de deshacerlo, para construir un nuevo proceso original.
- ✓ *encapsulación*: es la transformación de un proceso dinámico en un objeto cognitivo estático. Este objeto puede ser visto como una entidad total y puede ser transformado por otras acciones o procesos. En este caso, se dice que el proceso ha sido encapsulado en un objeto cognitivo.
- ✓ *desencapsulación*: es el proceso de volverse desde un objeto estático al proceso dinámico desde el cual fue encapsulado el objeto o tuvo su origen.
- ✓ *tematización*: es la reflexión sobre comprensión de un esquema, viéndolo como "un todo" y es capaz de realizar acciones sobre el esquema, entonces se dice que el esquema ha sido tematizado en un objeto.

En general, según Angélica (2014), una descomposición genética de un concepto se define como *el análisis teórico del mismo, en función de las construcciones mentales que un estudiante debería realizar para lograr su comprensión*. El investigador asume el concepto anterior y por tanto, en esta tesis se hará referencia al término "*análisis teórico de concepto (s)*", lo cual constituye un conjunto de acciones que realiza el profesor, previo a la actividad docente, para seleccionar los métodos de enseñanza más adecuados en función de lograr en los estudiantes, una adecuada significatividad en el aprendizaje.

### 1.2.3 Los mapas conceptuales en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática

En esta investigación se asume la definición de *mapa conceptual en Matemática* dada por Mederos et al. (2014), "[...] un mapa que integra los mapas de extensiones, de proposiciones, simbólicos y de cardinalidades" (p.57). A continuación se describen los componentes de esta definición, dada por el autor citado.

*Mapa de extensiones*: "[...] es un diagrama (una imagen visual), en el que se representan gráficamente las extensiones de varios conceptos subordinados a un mismo concepto; o entre los que existe alguna relación de dependencia" (p.38).

*Mapa de proposiciones*: "[...] es un conjunto de proposiciones, mediante el cual se establecen relaciones entre los diferentes elementos de un conjunto de conceptos" (p.46).

*Mapa simbólico:* “[...] expresión formal de relaciones entre conjuntos, relaciones de inclusión estricta o no estricta, de igualdad, de intersección vacía o no vacía, relaciones entre las cardinalidades, relaciones entre las estructuras que pudieran tener todas o parte de las extensiones, entre otras” (p.53).

*Mapa de cardinalidades:* “[...] colección de los números cardinales de las extensiones de los conceptos que aparecen en un mapa de extensiones, de proposiciones o simbólico” (p.53).

En la obra de Mederos et al. (2014), se describen como utilidad didáctica de los mapas conceptuales las siguientes:

- ✓ Son organizadores que integran conocimientos conceptuales de índole visual, lógica y simbólica y preparan al estudiante para que pueda dar solución o participar en el proceso de solución de tareas, en las que sea necesario utilizar conjuntos de conceptos organizados.
- ✓ Constituyen herramientas para los estudiantes no solo para aprender sino para aprender a aprender, ayudan a que estos se conviertan en aprendices con amplios significados.
- ✓ Permiten a los profesores dinamizar los métodos de enseñanza en función de lograr que los estudiantes adquieran estructuras conceptuales estables y con posibilidades de desarrollo continuo.

En esta investigación es de gran interés la utilización de los mapas conceptuales, pues se consideran un medio esencial para contribuir al desarrollo del PMA y para lograr significatividad en el aprendizaje; mediante estos los estudiantes relacionan sustancialmente los nuevos saberes con su estructura cognitiva. Además, se reconoce su importancia como medio heurístico, orientador en la racionalización del trabajo mental y en la dirección de la actividad matemática durante el desarrollo de tareas matemáticas.

### **1.3 El proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador, como teoría básica para el desarrollo del pensamiento matemático avanzado**

En la concepción del PEA desarrollador del AM a partir del Enfoque Histórico Cultural, se puede comprender el papel de cada uno de los sujetos que participan en el aula de clase, al considerar que la psiquis humana tiene un carácter activo en la regulación de la actuación y se determina histórica y

## *Capítulo I*

socialmente en su origen y desarrollo, en la medida en que se forma en el proceso de la actividad y comunicación que el sujeto establece con el medio socio-histórico en que vive.

Para la enseñanza desarrolladora es imprescindible considerar, como mínimo, dos niveles evolutivos en los estudiantes: el de sus capacidades reales y el de sus posibilidades para aprender y desarrollarse con la ayuda de los demás. La diferencia entre uno y otro nivel es lo que Vigotsky denomina la “Zona de Desarrollo Próximo” (ZDP) definida como:

[...] la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía del adulto o en colaboración con otros pares más capacitados. (Vigotsky, 1987, p.86)  
citado en (Patiño, 2007, p.58)

Los análisis de la obra de Castellanos (2001), ICCP (2001), Silvestre y Zilverstein (2003), permitió identificar como criterios básicos para concebir un PEA desarrollador los siguientes:

- ✓ Promover el desarrollo de la personalidad del educando; es decir, activar la apropiación de conocimientos, destrezas y capacidades intelectuales en estrecha armonía con la formación de sentimientos, motivaciones, cualidades, valores, actitudes e ideales.
- ✓ Potenciar el tránsito progresivo de la dependencia a la independencia y a la autorregulación, así como el desarrollo en el sujeto de conocer, controlar y transformar creadoramente su propia persona y su medio.
- ✓ Desarrollar la capacidad para realizar aprendizajes a lo largo de la vida, a partir del dominio de las habilidades y estrategias para aprender a aprender y de la necesidad de una autoeducación constante.

El PEA de la disciplina AM, ofrece múltiples posibilidades para contribuir de manera decisiva al desarrollo multilateral de la personalidad debido, entre otras, a las potencialidades de la disciplina para contribuir a desarrollar el intelecto de los estudiantes mediante la realización de deducciones, analogías, trasferencias y el

nivel de abstracción necesario para la representación mental de conceptos asociados a objetos matemáticos con paso al límite. La peculiaridad de dichos procesos, unido a la lógica de su estructura y a la rigurosidad de su lenguaje, imprimen un reconocido respeto ante la complejidad de sus formas; de ahí que su estudio exige hábitos de disciplina, persistencia y el trabajar ordenadamente, entre otras cualidades de la personalidad.

En esta tesis se concibe el PEA de la Matemática desde un enfoque desarrollador, el cual se entiende como:

[...] aquel que constituye un sistema en el cual, tanto la enseñanza como el aprendizaje son subsistemas que garantizan la apropiación activa, creadora, reflexiva, significativa y motivada del contenido como parte de la cultura general integral, teniendo en cuenta el desarrollo actual, con el propósito de ampliar continuamente los límites de la zona de desarrollo próximo potencial. Ello implica una comunicación afectiva y el desarrollo de actividades intencionales, cuyo accionar didáctico genere estrategias de aprendizaje que permitan aprender a aprender Matemática, como expresión del desarrollo constante de una personalidad integral y autodeterminada del estudiante.  
(Ballester et al. 2015, p.13)

Según Gibert (2012), citado en (Ballester et al., 2015, p.13), las dimensiones del PEA desarrollador de la Matemática son:

- ✓ *La activación-regulación*, conformada por la actividad intelectual productivo creadora y la reflexión-regulación metacognitiva. Se manifiesta en el aprendizaje de conceptos; proposiciones (en particular, teoremas, fórmulas, símbolos y propiedades); procedimientos (algorítmicos y heurísticos), técnicas de trabajo mental y práctico, así como estrategias de aprendizaje generales y específicas.
- ✓ *La significatividad*, conformada por el establecimiento de relaciones significativas en el aprendizaje y su implicación en la formación de sentimientos, actitudes y valores. Se expresa en la posibilidad del estudiante de establecer relaciones entre los nuevos conocimientos con los anteriores, además, en la reconstrucción de las formas de pensar y actuar que le permitan aprender a aprender Matemática en diferentes contextos de aprendizaje

## Capítulo I

Es importante destacar que las relaciones significativas anteriores, están relacionadas con el nivel de comprensión genuina de las formaciones conceptuales y dependen en gran medida de la variedad de representaciones semióticas que se utilicen para expresar dichas formaciones.

Sin embargo, debido a la variedad en los modos de significación, la comprensión genuina de las formaciones conceptuales requiere que se reconozcan los tipos de indicación o de significado que le son propios. La idea central de las formas simbólicas consiste en que el modo de significación del concepto no es único, sino que posee diferentes.

- ✓ *La motivación para aprender*, conformada por las motivaciones predominantemente intrínsecas hacia el aprendizaje y el sistema de autovaloraciones y expectativas positivas con respecto al aprendizaje escolar. Se expresa cuando se favorece la motivación práctica o extramatemática y la motivación intramatemática en íntima conexión con los intereses, necesidades y motivos de los estudiantes, de manera que identifiquen contradicciones, carencias, insuficiencias, necesidades internas de la Matemática, de la práctica y propias, que los conlleven a plantearse metas personales y colectivas de aprendizaje.

El desarrollo del PMA debe intencionarse desde la determinación y formulación de objetivos. De acuerdo con los niveles del proceso, el profesor tendrá en cuenta objetivos más generales (Modelo del profesional), intermedios (Programa de la Disciplina, Asignatura, Unidad Didáctica) y objetivos específicos de cada clase, pero siempre reconociendo la íntima relación entre ellos, es decir, su carácter sistémico.

El *objetivo*, como componente rector del PEA en su función orientadora y determinante respecto al resto de los componentes y en expresión de su intencionalidad político-ideológica, alcanzable mediante la acción, valoración flexible, personal, colectiva, negociada, cognitiva, formativa y educativa, permite proyectarlo en función del *enseñar a pensar, enseñar acerca del pensar y enseñar para pensar* los contenidos de la disciplina AM, como expresión del desarrollo integral de la personalidad.

El *contenido*, es aquella parte de la cultura y experiencia social que debe ser adquirida por los estudiantes y se encuentra en dependencia de los objetivos propuestos, responde a ¿qué enseñar?,

¿qué aprender? Así se convierten en contenidos del PEA del AM: los conceptos (expresados en forma de caracterizaciones o definiciones), las proposiciones matemáticas (en particular los teoremas, fórmulas, símbolos y propiedades), las estrategias de aprendizaje cognitivas y metacognitivas, los métodos y procedimientos algorítmicos y heurísticos, las habilidades para operar con ellos, las técnicas de trabajo mental y práctico, así como el desarrollo de formas de pensamiento flexible y de sentimientos, convicciones y valores.

El *método*, como componente dinámico del PEA responde a ¿cómo desarrollar el proceso?, ¿cómo enseñar? y ¿cómo aprender?; el método según los objetivos declarados, es regulador y expresión de la secuencia de actividades del profesor y de los estudiantes en unidad e interrelación, dirigidas al logro de los objetivos. Dicha secuencia de actividades debe fundamentarse en torno a lo problémico, lo heurístico, lo investigativo, lo creador y debe contribuir al desarrollo de las habilidades y capacidades implicadas en una actividad intelectual productiva, creadora, crítica y reflexiva.

Desarrollar el PMA desde la disciplina AM, está relacionado directamente con el empleo adecuado de *métodos problémicos*, los cuales según Torres (1993), se caracterizan como:

[...] una serie de acciones y modos de conducta del profesor, especialmente dirigidos a dar cumplimiento a objetivos generales de la enseñanza que exigen de los estudiantes la asimilación del contenido a niveles productivo y creador, y que sirven por tanto para provocar la actividad de búsqueda científica de los alumnos en la clase, sobre la base de la revelación de contradicciones inherentes al proceso de aprendizaje. (p. 22)

Las tareas desarrolladoras requieren de la determinación de un sistema de *medios de enseñanza-aprendizaje*, los cuales constituyen el soporte material de los métodos en estricta dependencia de los objetivos propuestos y revelan el aspecto interno del método; permiten utilizar con enfoque sistémico el libro de texto, las guías de estudio, los videos vinculados con la enseñanza-aprendizaje de los contenidos de AM, la computadora, los dispositivos móviles, los asistentes matemáticos, la calculadora, la televisión, las láminas, los instrumentos de dibujo, las plataformas interactivas en las redes informáticas, entre otras;



dichos medios permiten visualizar y racionalizar el desarrollo de la actividad intelectual y su autorregulación, el establecimiento de relaciones significativas y la motivación por el aprendizaje de los contenidos de la disciplina AM.

*Las formas de organización*, como componente integrador del PEA de los contenidos de la disciplina AM, constituyen la categoría en que se concretan y materializan sus partes, características y relaciones; además, reflejan las relaciones entre los estudiantes, el grupo y el profesor, en la dimensión espacial y temporal del proceso. Para potenciar un aprendizaje desarrollador se necesita de una forma organizativa con una estructuración adecuada, basada en un determinado sistema de relaciones estructurales y funcionales, que garantice el funcionamiento de los componentes del PEA como un todo sistémico.

*La evaluación* del PEA desarrollador en toda su amplitud, complejidad e integridad, se fundamenta en acciones evaluativas diseñadas con criterios científico-pedagógicos, lo que supone la determinación de ¿qué se evalúa?, ¿cómo se evalúa? y ¿con qué se evalúa? La evaluación desarrolladora debe caracterizarse por su carácter orientador y programático, por la relación dialéctica entre realidad y potencialidad, la integralidad, el carácter diferenciado o individualizado y la creación de oportunidades.

### **1.4 El desarrollo del pensamiento matemático avanzado en la formación inicial del profesor de Matemática, desde la disciplina Análisis Matemático**

En los análisis de los distintos planes de estudio hasta el E, se reconoce la necesidad de potenciar el pensamiento lógico, lo cual se incluye en el modelo del profesional como un objetivo a lograr. La evolución de esta aspiración se evidencia en el plan de estudio E, a partir del objetivo siguiente:

*“[...] Fundamentar desde las ciencias de la educación y los contenidos de las disciplinas propias de la carrera, alternativas de solución a los problemas profesionales, sustentados en la apropiación de conocimientos, habilidades, valores, la logicidad del pensamiento, el enfoque interdisciplinario, el uso de las tecnologías de la información y la comunicación” (Colectivo de autores, 2016, p.11).*

Este objetivo concede a las disciplinas la responsabilidad de fundamentar alternativas de solución a problemas profesionales y tiene como premisa el desarrollo de un pensamiento lógico.

Uno de los medios que se reconoce en el modelo del profesional para contribuir al desarrollo del pensamiento lógico, es precisamente la formulación y la resolución de problemas, por lo que es reconocido como parte de los objetivos en el Modelo del Profesional; tal es el caso del plan E, Colectivo de autores (2016), que plantea dentro de sus objetivos lo siguiente:

[...] *Enseñar a formular y resolver problemas* relacionados con diferentes aspectos de la realidad económica, política y social y donde se manifiesten las relaciones ciencia-tecnología-sociedad-ambiente, utilizando contenidos de la Matemática, *sobre la base de la aplicación de procesos de pensamiento*, procedimientos y estrategias de trabajo y el aprovechamiento de las tecnologías de la información y las comunicaciones. (p.11)

Estas aspiraciones se concretan en la formación del profesor de Matemática a través del trabajo de cada una de las disciplinas. Un papel trascendental lo tiene en este caso la disciplina AM, que en su programa el Colectivo de autores (2016) plantea que:

[...] es la rama de la matemática que se ocupa del análisis infinitesimal de las magnitudes variables (...) se ocupa de mostrar la existencia y unicidad de solución de problemas en los que intervienen magnitudes que varían infinitesimalmente y mostrar el camino para encontrar tales soluciones (...) su contenido, favorece la utilización del conocimiento, la lógica y los métodos de las dependencias funcionales entre las propias magnitudes variables y las cifras que las expresan para conducir e investigar dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática escolar. (p.2)

Es importante tener en cuenta que el Análisis Matemático, es la rama de la Matemática que tiene como objeto de estudio las propiedades de las funciones y como eje principal el concepto de límite que rige el comportamiento infinitesimal o infinito de variables relacionadas entre sí. Lo anterior es imprescindible para fundamentar, enriquecer y generalizar la Matemática escolar y manifiesta la complejidad que entraña la enseñanza-aprendizaje del Análisis Matemático, en tanto constituye “Matemática aplicada a la Matemática”

Desde la disciplina AM en la formación inicial del profesor de Matemática, se fundamenta la construcción de los dominios numéricos, a partir del principio de continuidad que tiene su base en la convergencia de

## *Capítulo I*

sucesiones; la monotonía de las funciones y los valores extremos se fundamentan en el análisis de la derivada de una función; se generaliza el concepto de función definida sobre  $\mathbb{R}$  y se extiende a  $\mathbb{R}^2$ ; se introduce el concepto de continuidad sobre la base del concepto de límite y se abordan sus potencialidades para determinar intervalos de solución para ecuaciones; el estudio del cálculo diferencial para profundizar en la graficación de funciones y en la resolución de problemas de optimización.

El concepto de área de una figura plana, se generaliza a través de los conceptos de integral definida e integral de línea; el concepto de volumen de un cuerpo se generaliza mediante el concepto de las integrales dobles y triples definidas; los conceptos relacionados con las ecuaciones y sus procedimientos de solución se generalizan a través de las ecuaciones diferenciales.

Desde el punto de vista del contenido del Análisis Matemático, lo complejo se manifiesta en la enseñanza-aprendizaje de los conceptos relacionados con el concepto de límite, el cual está asociado al efecto que producen las variables que se hacen muy pequeñas (infinitesimales) o tienden al infinito. Lo anterior implica procesos infinitesimales, infinitos, concepto del infinito (actual o potencial) y la naturaleza dual de entidades matemáticas objeto-proceso. Comprender dichos procesos, conlleva un elevado nivel de abstracción y generalización, lo cual requiere un desarrollo adecuado de los procedimientos lógicos asociados al pensamiento.

Dentro del PEA de la disciplina AM, juegan un papel trascendental las demostraciones matemáticas para la fundamentación rigurosa de los contenidos de la Matemática escolar, las cuales constituyen habilidades a desarrollar en los estudiantes de la carrera. Además, contribuir al desarrollo del PMA implica la necesidad e importancia de trabajar las definiciones rigurosas de los objetos matemáticos, sin embargo, la utilización de estas para el desarrollo de tareas matemáticas por lo general se hace imposible.

Por ejemplo, generalmente es imposible utilizar la definición de serie convergente para analizar la convergencia de la mayoría de las series; la definición de límite en  $\mathbb{R}^2$  y el cálculo de este; la definición de derivada y el cálculo de esta o la definición de integral definida y el cálculo de esta, entre otros. Para dichos ejemplos adquieren relativa importancia las caracterizaciones, los criterios, reglas, teoremas,

## Capítulo I

corolarios y propiedades, pero la utilización de estos en cambio de la definición formal, tiende a producir dificultades en la apropiación del concepto por parte de los estudiantes.

La disciplina AM en la carrera Licenciatura en Educación Matemática, debe contribuir a la formación de un *profesional creativo* en su desempeño, para lo cual debe trabajarse en función de lograr la *independencia cognoscitiva* de los estudiantes, el *desarrollo de un pensamiento lógico y flexible* que propicie dar soluciones originales a problemas académicos y de la práctica pedagógica (Colectivo de autores del modelo del profesional, 2016, p.9).

Las aspiraciones del modelo presentadas anteriormente son respaldadas en los objetivos de la disciplina AM, lo cual se puede apreciar en el caso del Plan E, cuando se propone en el objetivo cuatro:

[...] Desarrollar, a través del aprendizaje del Análisis Matemático, una cultura matemática y *formas de pensar y actuar*, sustentadas en *la utilización de procesos de pensamiento*, métodos, enfoques interdisciplinarios, procedimientos y estrategias, tanto cognitivas como metacognitivas, y una conducta en correspondencia con los principios y normas de la ética profesional. (Colectivo de autores de la disciplina AM, 2016, p.4)

En referencia a los objetivos analizados anteriormente (del modelo y la disciplina), es necesario tener en cuenta que *“la aplicación de los procesos de pensamiento”* siempre está presente en toda actividad humana. La idea debe ser *“sustentados en los procesos lógicos del pensamiento..., mediante los procedimientos...”*.

Dentro de los objetivos principales tanto del Modelo del Profesional, como de la disciplina y de las asignaturas, se encuentran como habilidades a desarrollar en los estudiantes, *formular y resolver problemas*. Es difícil identificar cuál de los tipos de tareas asociadas a dichas habilidades resulta más compleja a los estudiantes o pudieran estar al mismo nivel. El asunto es que formular un problema en sí mismo, ya es un problema a resolver y por tal motivo (Cruz, 2002, p.57), considera la formulación como caso especial de la resolución de problemas.

## Capítulo I

La formulación de problemas en la disciplina AM se realiza de forma intra o inter disciplinar y es producto de la maduración de un sistema de habilidades sobre determinados contenidos. Esto se debe a que el sujeto que formula un problema, inventa, crea, elabora y describe las condiciones necesarias y suficientes que caracterizan el problema.

Tanto el proceso de resolución de problemas como el de formulación, expresan el vínculo de los aspectos cognitivos y afectivos de la personalidad, esto sugiere abordar su caracterización a partir de la dimensión cognitivo-instrumental, al considerar el resultado obtenido, el contenido y la forma en que la estrategia tuvo lugar. El análisis integral del proceso de resolución de un problema demanda la consideración de una pluralidad de dimensiones, entre las que se destacan la creatividad de la autodirección y del método empleado, la poca familiarización con las técnicas empleadas y el contexto, el tiempo consumido, entre otros, (Cruz, 2002, p.57).

La disciplina AM en la formación del profesor de Matemática en la Universidad de Pinar del Río, en el Plan de Estudio E, se ha estructurado en cinco asignaturas (AM I, AM II, AM III, AM IV y AM V); se comienza en el primer semestre de segundo año con el AM I y se culmina en el primer semestre de cuarto año con el AM V: La asignatura AM I agrupa los temas: *sucesiones numéricas, series numéricas y límite y continuidad de funciones reales de una variable real*; el AM II agrupa los temas: *cálculo diferencial de funciones reales de una variable real e integral de funciones reales de una variable real*; el AM III agrupa los temas: *funciones de  $\mathbb{R}^2$ , límite y continuidad de funciones de  $\mathbb{R}^2$  y cálculo diferencial de funciones de dos variables*; el AM IV agrupa los temas: *integral doble, integral triple e integral de línea*; AM V agrupa los temas: *ecuaciones diferenciales de 1<sup>er</sup> orden y 2<sup>do</sup> orden y Matemática numérica*.

El AM es una de las disciplinas en la que mayores dificultades académicas presentan los estudiantes, debido a la complejidad que presenta la enseñanza y el aprendizaje de sus contenidos, determinada por la presencia de conceptos en los que intervienen procesos con paso al límite (límite funcional, derivada de una función, integral de una función, series, entre otros), para los cuales es necesario un alto nivel de abstracción.

### 1.5 Diagnóstico del estado inicial del desarrollo del pensamiento matemático avanzado

En este epígrafe, se analiza el comportamiento de la variable objeto de estudio: *el desarrollo del PMA*.

A partir de los análisis realizados en los epígrafes precedentes se define el desarrollo del PMA como el *accionar didáctico del profesor para dirigir la actividad cognoscitiva de los estudiantes en el campo de la Matemática, con la finalidad de lograr avances progresivos en el nivel de abstracción, la definición de conceptos, la formalización del conocimiento, la representación conceptual y la demostración matemática*.

A continuación, se describen las dimensiones de la definición anterior.

La dimensión: *accionar didáctico del profesor para dirigir la actividad cognoscitiva de los estudiantes, en el trabajo con las características esenciales del PMA*, se manifiesta en el sistema de acciones que el profesor planifica y pone en práctica durante el PEA de la disciplina AM.

*Acciones para potenciar el nivel de abstracción*

- ✓ *Reactivación del sistema de conocimientos necesarios*. Se manifiesta cuando el profesor reactiva en los estudiantes, mediante procedimientos heurísticos, los conocimientos necesarios y cualidades esenciales de un sistema de conceptos, para el desarrollo de actividades matemáticas.
- ✓ *Utilización del principio de analogía*. Se manifiesta en las acciones del profesor para orientar a los estudiantes a que establezcan similitudes de razonamientos y equivalencia entre procedimientos, durante el desarrollo de actividades matemáticas.

*Acciones para potenciar la definición de conceptos*

- ✓ *Aproximación formal en la definición de conceptos*. Se manifiesta en las acciones que realiza el profesor para conducir a los estudiantes en la definición de conceptos, desde el trabajo con definiciones propias intuitivas hasta la definición formal institucionalizada.
- ✓ *Precisión en la utilización de definiciones*. Se evidencia en la utilización precisa y eficaz de las definiciones para elaborar y clasificar objetos matemáticos, así como en la determinación de procedimientos de trabajo para el desarrollo de tareas matemáticas.

## Capítulo I

### *Acciones para potenciar la formalización del conocimiento*

- ✓ *Utilización de la terminología convencional para la definición de conceptos.* Se manifiesta en las acciones que realiza el profesor para que el estudiante se apropie del sistema de signos convencionales para denotar ideas matemáticas.
- ✓ *Representación de un mismo contenido en lenguajes diferentes.* Se manifiesta en las acciones que realiza el profesor para presentar un mismo contenido a los estudiantes en diferentes formas y lenguajes.

### *Acciones para potenciar la representación conceptual*

- ✓ *Utilización de esquemas conceptuales para modelar el contenido matemático.* Se manifiesta en las acciones que utiliza el profesor para representar, esquematizar y modelar contenidos matemáticos o el desarrollo de tareas matemáticas.
- ✓ *Utilización de mapas conceptuales para la visualización de relaciones y propiedades.* Se manifiesta en las acciones del profesor dirigidas a la elaboración de mapas conceptuales para orientar la actividad racional de los estudiantes y que estos visualicen relaciones entre conceptos.

### *Acciones para potenciar la demostración matemática*

- ✓ *Utilización de procedimientos heurísticos en la búsqueda de una demostración.* Se manifiesta en las acciones del profesor para lograr un clima de descubrimiento, que los estudiantes formulen hipótesis y establezcan relaciones.
- ✓ *Rigurosidad en la representación de la demostración.* Se manifiesta en la generalidad, solidez, precisión, argumentación, fundamentación y formalización con al que el profesor trabaja y presenta la demostración.

La dimensión: *actividad cognoscitiva de los estudiantes, relacionada con las características esenciales del PMA*, se aprecia a partir del desarrollo cualitativo y de las variaciones que, en función del contenido del pensamiento, experimentan los estudiantes en la comprensión de los procesos de su pensamiento y en la organización de su manifestación hacia un fin determinado; en el incremento de una apropiación cada vez

## Capítulo I

más amplia y más hábil de los conocimientos, lo que incluye el componente conceptual teórico y práctico, así como la formación y desarrollo de habilidades relacionadas con el *nivel de abstracción*, la *definición de conceptos*, la *formalización del conocimiento*, la *representación conceptual* y la *demostración matemática*.

### *El nivel de abstracción*

- ✓ *Determinación de características esenciales en los análisis que se realizan durante el desarrollo de actividades matemáticas.* Se manifiesta en la habilidad de los estudiantes para determinar lo que es esencial y obviar lo no esencial, así como de sintetizar lo esencial durante el desarrollo de tareas matemáticas.
- ✓ *Coherencia en las argumentaciones.* Se manifiesta en la habilidad de los estudiantes para comunicar con coherencia, de forma oral o escrita, las ideas esenciales que sustentan los razonamientos realizados.

### *La definición de conceptos*

- ✓ *Significatividad en la relación concepto-definición.* Se manifiesta en el nivel de precisión y valoración que realizan los estudiantes sobre las relaciones esenciales entre el concepto y su definición durante el desarrollo de la actividad matemática.
- ✓ *Utilización correcta de definiciones.* Se manifiesta en la habilidad del estudiante para expresar y utilizar las cualidades esenciales del concepto, así como para algoritmizar definiciones en la búsqueda de nuevos conocimientos y soluciones a tareas matemáticas.

### *La formalización del conocimiento*

- ✓ *Conversión del lenguaje común al lenguaje técnico de la matemática.* Se manifiesta en la habilidad del estudiante para expresar ideas del lenguaje común al lenguaje técnico de la matemática.
- ✓ *Identificación de un mismo concepto en formalizaciones diferentes.* Se manifiesta en la habilidad del estudiante para identificar proposiciones equivalentes en distintos lenguajes, para reformular tareas matemáticas y para buscar vías de solución.



### *La representación conceptual*

- ✓ *Utilización de esquemas gráficos de apoyo a la racionalización del trabajo mental.* Se manifiesta en la habilidad del estudiante para crear y utilizar esquemas gráficos o dibujos auxiliares, que le permitan la comprensión y el análisis en el desarrollo de tareas matemáticas.
- ✓ *Representación de un concepto en diferentes registros semióticos.* Se manifiesta en la habilidad del estudiante para expresar, interpretar, manipular o identificar un mismo objeto matemático o idea matemática en diferentes registros semióticos.

### *La demostración matemática*

- ✓ *Logicidad en la búsqueda de la demostración.* Se manifiesta en un adecuado razonamiento lógico en la búsqueda de la vía de demostración.
- ✓ *Formalización en la representación de la demostración.* Se manifiesta en la coherencia de la demostración, en una adecuada fundamentación y utilización correcta de la terminología matemática.

El estudio diagnóstico inicial, se inició en el curso escolar 2015-2016 con el plan de estudio D y se extendió hasta el curso 2016-2017 con el plan de estudio E, por lo que la muestra abarca estudiantes de las carreras Licenciatura en Educación Matemática-Física y Licenciatura en Educación Matemática. En este caso se seleccionaron de manera aleatoria 42 estudiantes entre segundo y quinto años. En el caso de los profesores, se tomaron los 10 profesores que imparten la disciplina AM en dichas carreras.

Inicialmente se realizó un estudio de los documentos normativos de la carrera (Anexo 7), posteriormente se aplicó una prueba pedagógica interactiva (Anexo 8), después se realizó una entrevista a los estudiantes (Anexo 9) para enriquecer los resultados de la prueba anterior. Con el objetivo de corroborar las causas que originaron los resultados obtenidos en la prueba pedagógica interactiva, se realizó la observación científica a 60 clases de Análisis Matemático (Anexo 10), para verificar el origen de los resultados obtenidos con la aplicación de los instrumentos anteriores, se realizó una encuesta a 10 profesores de la

disciplina AM (Anexo 11) con el objetivo de diagnosticar la preparación científico-metodológica que poseen los profesores, para contribuir a potenciar el desarrollo del PMA, desde el PEA de la disciplina AM.

### 1.5.1 Resultados del diagnóstico inicial del desarrollo del pensamiento matemático avanzado

En los análisis realizados al Modelo del Profesional (Planes D y E), al programa de la disciplina AM y sus asignaturas según la guía del Anexo 7, se encontró que:

En el Modelo del Profesional se concibe el desarrollo del pensamiento como parte del desarrollo integral de la personalidad desde un enfoque histórico-cultural. En parte de sus objetivos se orienta a la solución de problemas profesionales sustentado en la *lógica del pensamiento y sobre la base de la aplicación de procesos de pensamiento*. Esta última idea expresa limitaciones, porque parece indicar que a veces no se aplican dichos procesos y lo cierto es que dichos procesos siempre están presentes en toda actividad humana.

Los objetivos de la disciplina AM, *presentan la misma limitación anterior*. Las orientaciones metodológicas en el programa de la disciplina, refieren a la formación de un *profesional creativo en su desempeño*, el *desarrollo de un pensamiento lógico y flexible*, pero *no se explicita cómo hacerlo*. Aunque para garantizar la *actividad reflexiva*, se orientan y se proponen estrategias para la comprensión de problemas; estrategias metacognitivas ante una exigencia, para determinar vías de solución y para valorar una propuesta de solución, las cuales se consideran muy positivas y su existencia constituye una fortaleza.

Además se tienen como *fortalezas*, tanto en la disciplina como en sus asignaturas, una adecuada estructuración de los contenidos, del sistema de habilidades y de valores. También se proponen como métodos de enseñanza y aprendizaje el inductivo, la analogía y desde el punto de vista del Programa Heurístico General, los principios de analogía y reducción; pero *dichos métodos para que sean efectivos, en este caso, deben estar sustentados en una teoría epistemológica sobre cómo construyen los estudiantes conocimientos relacionados con el concepto de límite, la cual no se refleja en las investigaciones realizadas ni en los documentos metodológicos existentes*.

A juicio del investigador, una de las mayores limitaciones que se detectaron es que *no existe una concepción teórica sobre la naturaleza epistemológica de los objetos matemáticos relacionados con*

## Capítulo I

*procesos de límite, ¿cómo se enseñan dichos objetos?, ¿cómo los aprende el estudiante?, ¿cuáles son los métodos de enseñanza más adecuados?* Dicha limitación está asociada a la escasa y dispersa producción de literatura relacionada con la Didáctica de la Matemática Superior y en particular, del Análisis Matemático en Cuba.

*El desarrollo del pensamiento matemático avanzado, según la prueba pedagógica, la entrevista a los estudiantes, las observaciones a clases y la encuesta a profesores de AM*

En el análisis que se muestra a continuación, se hace una integración de los resultados para cada característica del desarrollo del PMA.

### Análisis del *nivel de abstracción*

En la prueba pedagógica interactiva se evaluó como *poco adecuada*, tanto la determinación de características esenciales en los análisis que se realizan durante el desarrollo de actividades matemáticas, como la coherencia en las argumentaciones (resultados del Anexo 8 y Tabla 8.2); por ejemplo en la pregunta 1, 24 (57,1%) estudiantes presentaron dificultades para visualizar  $f(x)$  como función única, estos analizan las ramas de la función como dos funciones distintas; 32 (76,2%) estudiantes no son capaces determinar características esenciales para relacionar dominio e imagen (pregunta 1.2); en la pregunta 1.6, 11 (26,2%) estudiantes analizaron correctamente que  $f$  es discontinua en  $x_0 = 0$ , pero *en la respuesta no generalizaron a todo el intervalo*; como *potencialidad* se observó que *los estudiantes que utilizan esquemas argumentaron adecuadamente*. En la entrevista a los estudiantes (Anexo 9.1), estos no reconocen la necesidad de estudiar los contenidos del AM, la mayoría manifestó que les es difícil comprender los conceptos y resolver problemas relacionados con el límite, y el cálculo diferencial e integral.

Lo anterior se corroboró en las observaciones realizadas a clases, donde se encontró como tendencia que los profesores no mantienen una regularidad en el trabajo para potenciar el nivel de abstracción, por ejemplo, en el (36) 60% de las evaluaciones es *insuficiente* la utilización del principio de analogía para vincular las experiencias cognoscitivas del estudiante similares a las que se enseñan; además aunque la reactivación de los conocimientos necesarios se evaluó como *adecuada*, en 26 (43,3%) clases se evaluó como insuficiente

(Anexo 10, Tabla 10.2). La utilización adecuada de procedimientos heurísticos es indispensable para potenciar el nivel de abstracción, sin embargo en la encuesta a profesores, las orientaciones metodológicas de la disciplina y asignaturas se evaluaron de *poco adecuado* (Anexo 11, Tabla 11.1).

### Análisis de la *definición de conceptos*

En la prueba pedagógica, tanto la significatividad en la relación concepto-definición como la utilización correcta de definiciones se evaluó como *poco adecuada* (Anexo 8, Tabla 8.2); por ejemplo, en la pregunta 1.5 c), 34 (80,9%) estudiantes presentaron dificultades al utilizar elementos de la definición de límite; en la pregunta 1.4, 9 (21,4%) estudiantes intentaron explicar el concepto de límite y su definición pero la descripción no fue adecuada y 18 (42,9%) no lo hicieron (resultados del Anexo 8). En la encuesta realizada a los estudiantes, la mayoría no establece diferencia entre concepto y definición.

En relación con las limitaciones anteriores, durante la observación científica a clases (Anexo 10, Tabla 10.2), se pudo constatar que las acciones del profesor para dirigir a los estudiantes en la elaboración de conceptos mediante aproximaciones formales se evaluó de *poco adecuada*, en este caso la elaboración de conceptos no se concibe adecuadamente en las tareas docentes que propone el profesor, no se explicita en la estructura de ejercicios o problemas, ni forma parte de la evaluación; dichas deficiencias se observaron en 25 (41,7%) clases; la precisión en el proceso de definición de conceptos se evaluó de *adecuado*, pero en 19 (31,7%) clases fue insuficiente. Además en la encuesta a profesores, las orientaciones metodológicas dirigidas al trabajo con el concepto y su definición se evaluaron como *poco adecuadas* (Anexo 11, Tabla 11.1).

### Análisis de la *formalización del conocimiento*

En la prueba pedagógica interactiva, tanto la conversión del lenguaje común al lenguaje técnico de la matemática, como la identificación de un mismo concepto en formalizaciones diferentes se evaluaron de *adecuadas* (Anexo 8, Tabla 8.2), pero en las observaciones a clases este último indicador se evaluó como *poco adecuado*, el cual se constató como insuficiente en 45 (75%) clases (Anexo 10, Tabla 10.2); por ejemplo, de la prueba pedagógica (Anexo 8, resultados de la pregunta 1.4) se concluyó que los

estudiantes por lo general no recuerdan con precisión las definiciones y presentan dificultades al formalizar proposiciones y características esenciales; además, en las observaciones a clases se comprobó que los estudiantes no usan correctamente la terminología establecida en las definiciones de conceptos y no son consecuentes con las expresiones simbólicas establecidas para definir los objetos matemáticos y cuando las utilizan, lo hacen de forma incoherente o no completan los símbolos correctamente.

### *Análisis de la representación conceptual*

En la prueba pedagógica se evaluó de *poco adecuada*, tanto la utilización de esquemas gráficos de apoyo a la racionalización del trabajo mental, como la representación de un concepto en diferentes registros semióticos; por ejemplo, en la pregunta 1.3 (Anexo 8, resultados), 30 (71,4%) estudiantes afirmaron que no existe el límite, pero de estos, 19 (45,2%) habían representado mal la función en la actividad 1. c), esto quiere decir que no les fue necesaria la representación gráfica para calcular bien el límite, pero entonces no hubo coordinación de registros semióticos, ni significatividad, ni logicidad en sus razonamientos, además en la entrevista (Anexo 9.1), la mayoría de los estudiantes planteó que en AM *no se pueden hacer esquemas* que es más trabajar con variables y por tanto estos *no sirven para buscar soluciones*.

Las causas de las limitaciones anteriores se evidenciaron durante las observaciones a clases (Anexo 10, Tabla 10.2), donde se evaluó como *poco adecuada* la utilización de esquemas conceptuales para modelar el contenido matemático y se comprobó que es insuficiente en 41 (68,3%) clases. También la utilización de mapas conceptuales para la visualización de relaciones entre conceptos se evaluó de *poco adecuada*, en este caso fue insuficiente en 44 (73,3%) de las clases visitadas, los profesores presentaron limitaciones metodológicas para elaborar y utilizar esquemas conceptuales y modelos gráficos de apoyo a los contenidos que enseñan. Además, en la encuesta a profesores (Anexo 11, Tabla 11.1) se evaluó como *poco adecuada* las orientaciones metodológicas para la utilización de esquemas y el trabajo con los mapas conceptuales en la disciplina AM.

### Análisis de la *demostración matemática*

En la prueba pedagógica interactiva (Anexo 8, Tabla 8.2), se evaluó de *inadecuada* tanto la logicidad en la búsqueda de la demostración, como la formalización en la representación de la demostración; por ejemplo, en el (Anexo 8, resultados de la pregunta 1.5 b), solo 8 (19%) estudiantes demostraron bien la no existencia del límite, los 34 (80,9%) restantes presentaron insuficiencias, también se constató que para realizar la demostración, presentan incoherencias en la utilización de símbolos, falta de equivalencia y logicidad en la secuencia de razonamientos, además 37 (88,1%) no identificaron correctamente el tipo de demostración. En la entrevista (Anexo 9.1), la mayoría de los estudiantes afirmó que en AM casi nunca se demuestra, solo se calcula límite, derivadas, se grafican funciones, etc., además tienen escasos conocimientos sobre la habilidad demostrar y desconocen las vías de demostración.

Durante las observaciones a clases (Anexo 10, Tabla 10.2), se evaluó de *adecuada* la utilización de procedimientos heurísticos en la búsqueda de una demostración, pero fue insuficiente en 19 (31,7%) clases; en 27 (45,0%) clases, la rigurosidad en la representación de la demostración fue insuficiente; se pudo constatar que las principales limitaciones en la enseñanza de la demostración matemática se encuentran en la explicación y fundamentación lógica de las vías de demostración que se utilizan, en las ventajas y desventajas del método utilizado y en el análisis de la rigurosidad en la demostración. Además, en la encuesta a profesores (Anexo 11, Tabla 11.1) se evaluó como poco adecuada las orientaciones metodológicas para el trabajo con las demostraciones matemáticas dentro de la disciplina AM.

### *Regularidades del diagnóstico inicial del desarrollo del pensamiento matemático avanzado*

#### *Limitaciones*

1. En el Modelo del Profesional y en el programa de la Disciplina AM, los objetivos presentan limitaciones en la concepción de los procesos del pensamiento.
2. Los estudiantes presentan limitaciones para determinar y representar cualidades esenciales de los objetos matemáticos con paso al límite.

## *Capítulo I*

3. Los estudiantes presentan limitaciones en la utilización de conceptos para la elaboración de nuevos conceptos y para argumentar sus ideas; además, utilizan definiciones de conceptos aún no formados.
4. Los estudiantes presentan limitaciones para formalizar sus conocimientos y manifiestan incoherencias entre el lenguaje verbal y el escrito formalizado.
5. Los profesores presentan limitaciones para la dirección racional de la actividad cognitiva de los estudiantes, fundamentalmente en la elaboración de mapas conceptuales y esquemas gráficos auxiliares, así como en la coordinación de registros semióticos para potenciar la significatividad del aprendizaje de los contenidos de Análisis Matemático.

### *Fortalezas*

1. En el Modelo del Profesional y en el programa de la Disciplina AM, se reconoce la necesidad de desarrollar el pensamiento lógico y matemático de los estudiantes.
2. La carrera cuenta con estudiantes que tienen potencialidades para ser excelentes profesionales de la educación matemática y con un claustro de profesores altamente comprometido con la formación integral de los estudiantes y que tiene reconocido prestigio y experiencia en la formación de profesores de Matemática.
3. Se cuenta con el programa de la disciplina AM y de sus asignaturas, con estrategias educativas para la carrera y años académicos, las cuales contienen sistemas de acciones dirigidos a la formación integral de la personalidad de los estudiantes, en función de alcanzar los objetivos del Modelo del Profesional.

## **Conclusiones parciales**

1. El pensamiento es un proceso cognoscitivo que se estudia desde la Filosofía, la Psicología y la Lógica, el PMA como caso particular se caracteriza por la progresiva importancia que adquieren los procesos cognitivos relacionados con nivel de abstracción, la formalización, la representación, la definición y la demostración, para comprender contenidos matemáticos con paso al límite. El estudio del PMA se ha enfocado desde el PEA desarrollador, la teoría de las representaciones semióticas, la descomposición genética de conceptos y se manifiesta en el desarrollo de la actividad matemática.
2. Los métodos productivos juegan un papel importante en el PEA desarrollador de la disciplina AM; estos propician la participación activa de los estudiantes en la producción de sus conocimientos y en consecuencia, se potencia el desarrollo del PMA; además, resultan necesarios para la significatividad del aprendizaje de contenidos matemáticos relacionados con el concepto de límite y para potenciar el nivel de abstracción en la comprensión de estos.
3. A partir de la definición del desarrollo del PMA, se precisaron sus características esenciales y sobre la definición de estas, se determinaron indicadores para el diagnóstico inicial de la variable objeto de estudio. Mediante dicho diagnóstico se constató que existen limitaciones de orden teórico y epistemológico para un adecuado tratamiento metodológico a contenidos matemáticos relacionados con el concepto de límite; además, los resultados del diagnóstico indican que los significados que los estudiantes construyen sobre los conceptos, definiciones y teoremas del AM, están vinculados a determinados modos de representación y que tales significados no están relacionados.
4. Por las limitaciones teóricas y prácticas existentes sobre cómo potenciar el desarrollo del PMA, resulta necesario elaborar un modelo didáctico que integre elementos de la teoría de las representaciones semióticas, la descomposición genética de conceptos y la utilización de mapas conceptuales. El enfoque metodológico para el PEA desarrollador de contenidos relacionados con el concepto de límite debe promover la participación activa de los estudiantes en la construcción de sus conocimientos.



## **CAPÍTULO II**

**MODELO DIDÁCTICO PARA POTENCIAR EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO  
MATEMÁTICO AVANZADO DESDE LA DISCIPLINA ANÁLISIS MATEMÁTICO**

## CAPÍTULO II. MODELO DIDÁCTICO PARA POTENCIAR EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO DESDE LA DISCIPLINA ANÁLISIS MATEMÁTICO

En este capítulo, se presenta un modelo didáctico para potenciar el desarrollo del PMA. Dicho modelo sistematiza las características esenciales del PMA en tres categorías principales: la *representación en esquemas*, la *visualización lógica* y la *creatividad matemática*; para su adecuada instrumentación en las clases de la disciplina AM, se elaboró el *método genético-constructivo* el cual propicia un aprendizaje desarrollador de los contenidos de dicha disciplina a partir del trabajo con la descomposición genética de conceptos, la coordinación de registros semióticos y los mapas conceptuales.

### 2.1 Explicación del proceso de modelación

La utilización de modelos en la investigación pedagógica cada vez ocupa un lugar más importante, al convertirse en medio y método para lograr representaciones simplificadas de fenómenos complejos, como los que se presentan en el área de las ciencias pedagógicas.

En la obra de Valle (2012), se presenta un estudio sobre la utilización de los modelos en la investigación pedagógica, en dicha obra para caracterizar el concepto de modelo se citan autores como García (1977), Martínez (1998), Ruíz (2002), Ordaz (2003), entre otros. Sobre las definiciones que se citan se puede resumir que el modelo es una: *representación de un objeto, construcción teórica de un objeto, sistema de relaciones de un objeto, abstracción teórico-formal de un objeto, descripción teórica de un objeto o reproducción simplificada de un objeto*, que permite, *simplificar, explicar, estudiar, experimentar, descubrir nuevas relaciones y cualidades del objeto*.

Sobre el concepto de *modelo científico* Valle (2012), afirma que [...] “el modelo científico es una representación de aquellas características esenciales del objeto, de cómo puede ser cambiado e implementado, así como evaluado, lo que permite descubrir y estudiar nuevas relaciones y cualidades con vistas a la transformación de la realidad” (p.139). En este caso, el modelo es una manera de explicar la teoría o una parte de la teoría científica y acercar lo abstracto a lo concreto.

Además en esta investigación se asume la definición de *modelo didáctico* dada por Valle (2007), quien lo

## Capítulo II

define como “[...] la representación de aquellas características esenciales del proceso de enseñanza – aprendizaje o de alguno de sus componentes con el fin de lograr los objetivos previstos” (p.11).

A partir de las dos definiciones anteriores, se considera que un *modelo didáctico* es *una representación de los componentes esenciales del proceso de enseñanza-aprendizaje o de alguno de ellos, de cómo puede ser cambiado e implementado, así como evaluado, lo que permite descubrir y estudiar nuevas relaciones y cualidades con vistas a la transformación de la realidad.*

Finalmente, se concibe el modelo didáctico para potenciar el desarrollo del PMA como una *representación de los componentes esenciales del proceso de enseñanza-aprendizaje, de manera que se describa el accionar didáctico del profesor para potenciar, en los estudiantes de la carrera Licenciatura en Educación Matemática, el nivel de abstracción, la definición de conceptos matemáticos, la formalización del conocimiento, la representación conceptual y la demostración matemática, a partir de las potencialidades que brindan el trabajo con la representación en esquemas, la visualización lógica y la creatividad para el aprendizaje desarrollador de contenidos con paso al límite.*

En esta tesis se asumen como componentes del modelo didáctico *los fundamentos, el objetivo general, la caracterización del objeto de investigación, las formas de implementación y las formas de evaluación.* No se incluye la estrategia como uno de sus componentes, pues se considera que el modelo es abstracción simplificada de la realidad y la estrategia es un medio para la concreción práctica del modelo.

El proceso de modelación se inicia para obtener una aproximación a las causas de insuficiencias detectadas en el PEA de la disciplina AM, relacionadas con el bajo rendimiento académico y la forma en que los estudiantes piensan los contenidos matemáticos relacionados con el concepto de límite. El análisis de dichas limitaciones y una sistematización teórica relacionada con estas, permitió determinar un conjunto de regularidades y relaciones esenciales.

A partir de la abstracción, en término de regularidades y relaciones esenciales, del desarrollo del PMA, se obtiene un modelo que constituye una representación del objeto de investigación. El modelo que se presenta se desarrolló principalmente en vínculo estrecho entre los referentes teóricos determinados y su

## *Capítulo II*

concreción práctica en la clase. Es decir, el investigador durante la práctica pedagógica experimentó nuevas ideas, relaciones, conceptos, etc. y según los resultados parciales obtenidos, se fue conformando el modelo didáctico.

En una versión inicial del modelo didáctico que se presenta, solo se caracterizó el desarrollo del PMA para determinados contenidos de la disciplina AM en cuanto al nivel de abstracción, la definición de conceptos, la formalización del conocimiento, la representación conceptual y la demostración matemática. Dichas características se sustentaron en el análisis teórico de conceptos según la teoría APOE, en la teoría de las representaciones semióticas y en la utilización de mapas conceptuales.

La aplicación del método Delphi (Anexos 12, 13 y 14), permitió verificar la importancia, calidad y factibilidad que confieren los expertos, tanto al modelo propuesto como a la concreción práctica de este mediante una estrategia metodológica. Además, permitió realizar las correcciones pertinentes para su perfeccionamiento. La selección de los expertos se hizo sobre una base inicial de 19 y de estos fueron seleccionados 16, según el nivel de competencia necesario para el tema que se investiga (Anexo 13, Tabla 3.4).

En la primera ronda participaron 16 expertos y solo 14 estuvieron en condiciones de colaborar en una segunda ronda, con la cual se concluyó, pues los resultados obtenidos fueron satisfactorios. En la segunda ronda se incorporan nuevos indicadores a partir de las sugerencias hechas por los expertos para el perfeccionamiento del modelo, esto se puede observar en el Anexo 14, Tabla 14.1 y Tabla 14.3.

Inicialmente se detectaron y corrigieron insuficiencias teóricas para abordar el desarrollo del PMA desde las clases de AM. En este sentido, se ofreció otra mirada a los referentes teóricos relacionados con la descomposición genética de conceptos y se introdujeron los mecanismos para la elaboración de esquemas; se precisó el trabajo con las representaciones semióticas y sus potencialidades para el aprendizaje desarrollador. Además se asumieron los principios de una educación desarrolladora propuestos por Silvestre y Zilverstein (2003)

Otra de las sugerencias fue la incorporación de etapas para el desarrollo del PMA con el objetivo de potenciar dicho pensamiento durante toda la disciplina AM, pues inicialmente en el modelo solo se describían

## Capítulo II

las relaciones entre las características esenciales del PMA. Para determinar las etapas del modelo, fue necesario estudiar las formas en que los estudiantes visualizan, fundamentan desde la lógica y generalizan los contenidos de la disciplina AM. En este caso, se llegó a la conclusión de que era necesario integrar acciones para el trabajo con las características esenciales del desarrollo del PMA en tres categorías fundamentales: *la representación en esquemas, la visualización lógica y la creatividad matemática*.

El modelo se enfocó en describir cómo debe ser el accionar del profesor y los estudiantes desde las clases de AM para potenciar las características esenciales del PMA y contribuir al desarrollo del mismo. Para ello se propuso organizar el contenido en tres núcleos conceptuales con el objetivo de viabilizar el trabajo metodológico del profesor para la descomposición genética de conceptos y se crea el *método genético-constructivo* el cual transita por las fases *activación-motivación, configuración-significatividad y aplicación-creatividad*, de forma tal que el estudiante tenga una participación activa en la construcción de sus conocimientos matemáticos.

El desarrollo del PMA se potencia en el tránsito sistemático y cíclico por las categorías: *representación en esquemas, visualización lógica y creatividad matemática* desde las clases de AM. Además dichas categorías se desarrollan en una primera etapa intencionada a familiarizar al estudiante en el trabajo con las características esenciales del PMA, sobre la base de la reflexión y la concientización de su importancia para comprender los contenidos de la disciplina AM; y en una segunda etapa donde se sistematizan las características esenciales del PMA con el objetivo de lograr en los estudiantes mayores niveles de independencia, flexibilidad, profundidad y logicidad en los procesos de razonamiento.

Por las transformaciones anteriores hubo que rediseñar la estrategia metodológica e incluir dentro de la etapa “intervención práctica” las acciones para la representación en esquemas, la visualización lógica y la creatividad matemática con sus correspondientes acciones; por este motivo, aparecen nuevos indicadores a evaluar en la estrategia durante la segunda ronda de consulta a expertos. En esta última ronda se observa una evaluación cualitativamente superior por cada indicador; todos se evaluaron de adecuado, bastante adecuados y muy adecuados, como se puede observar en el Anexo 14, Tabla 14.3. Con estos

resultados se pudo encauzar el camino definitivo para el perfeccionamiento del modelo antes de ser introducido en la práctica.

A continuación, se presenta un esquema donde se han representado las relaciones esenciales entre los componentes del modelo propuesto y posteriormente se describen.

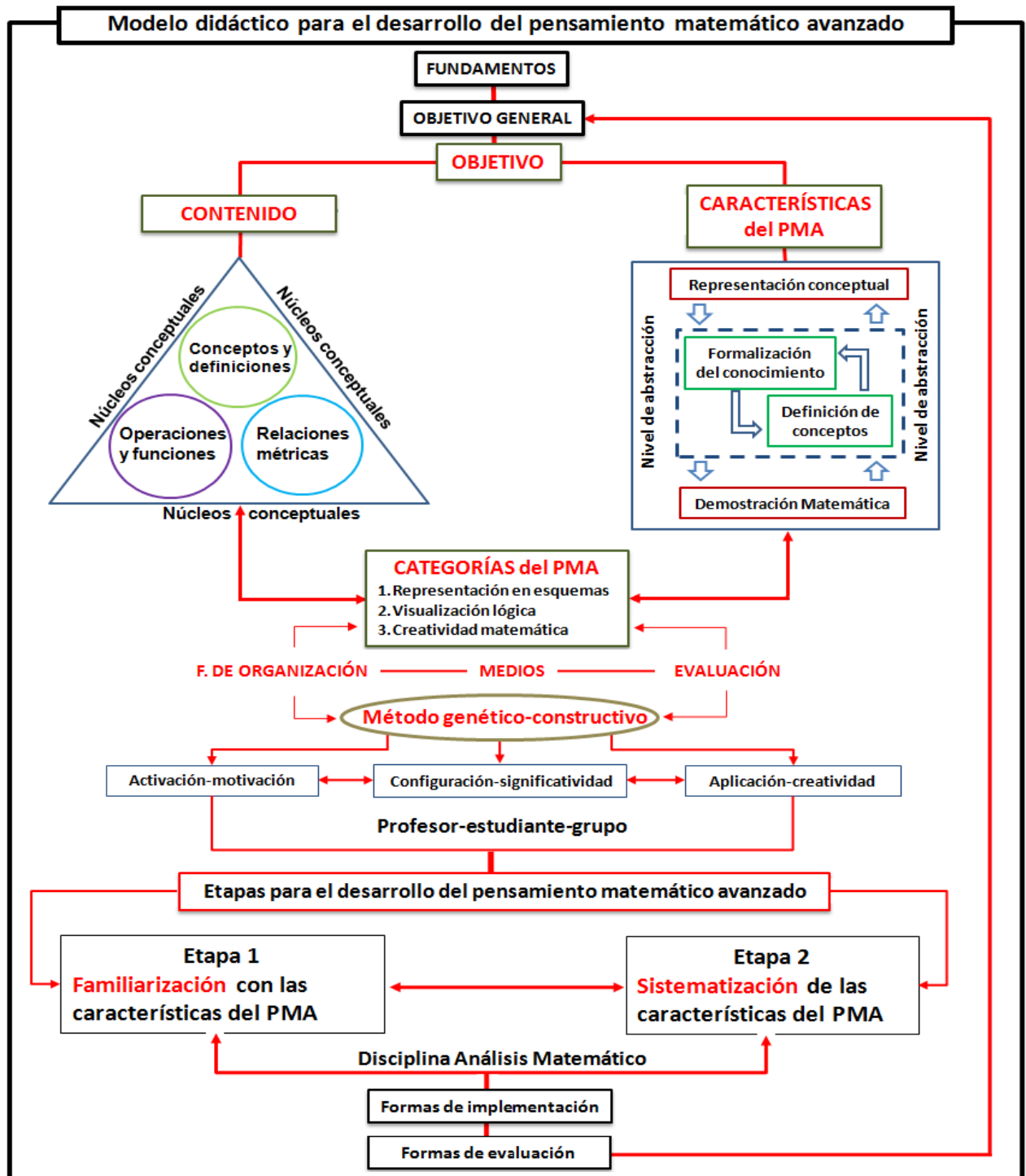


Figura 2.1. Ilustración gráfica para la relación lógica de implicación en el modelo.

## 2.2 Fundamentos del desarrollo del pensamiento matemático avanzado

Se asumen la Filosofía marxista-leninista y la Dialéctica materialista, como ciencia que estudia las leyes más generales del movimiento y del desarrollo de la naturaleza, de la sociedad y del pensamiento. Para concebir adecuadamente el desarrollo del PMA, se debe partir de lo que plantea la Psicología materialista dialéctica sobre la formación y desarrollo de la psiquis, expresada en los siguientes principios: *principio del desarrollo*, *principio del determinismo dialéctico* y *principio de la unidad de la psiquis con la actividad y la comunicación*.

Uno de los aspectos esenciales del principio del desarrollo, es que la psiquis se forma y se desarrolla (Pérez, Bermúdez, Acosta, y Barrera, 2004, p.7). Esto presupone que las características, cualidades y procesos del PMA se organizan, integran y regulan desde la interacción social y que las formas de pensamiento no son dadas de una vez y para siempre, sino que se forman y desarrollan durante toda la vida, puesto que la psiquis humana está en constante cambio y transformación, en constante movimiento.

El principio del determinismo dialéctico de la psiquis plantea como esencias, en primer lugar, que *la psiquis humana está determinada por la interrelación dialéctica entre lo interno y lo externo* (Pérez et al., 2004, p.9). Esto quiere decir que el desarrollo del PMA es producto de la influencia mutua entre las condiciones internas de los estudiantes y el contexto social en el que se realizan prácticas matemáticas relacionadas con los contenidos del AM. En segundo lugar, en dicho contexto, *lo externo* (las influencias del profesor, de los estudiantes entre sí, del grupo) *actúa como fuente de desarrollo intelectual y lo interno* (los saberes matemáticos, las creencias, lo afectivo) *es premisa para el desarrollo psíquico*.

El principio de la unidad de la psiquis con la actividad y la comunicación se expresa en dos aspectos fundamentales: *la psiquis se forma en la actividad que el sujeto realiza con el medio y en la comunicación que establece con las demás personas y es un resultado de dicha actividad y dicha comunicación* (Pérez et al., 2004, p.11). En este sentido, la actividad constituye la interacción donde los estudiantes forman la imagen o reflejo de los saberes asociados a la disciplina AM, establecen relaciones y desarrollan las características esenciales del PMA a partir de la interiorización de determinados aspectos de la actividad externa.

## *Capítulo II*

Por tanto, la asimilación e interiorización de acciones y operaciones y su conversión en internos, forma procedimientos lógicos del pensamiento que permiten al estudiante abordar con éxito múltiples tareas matemáticas. Otro aspecto importante del principio que se trata, es que una vez formada la psiquis, esta manifiesta y regula la actividad y la comunicación (Pérez et al., 2004, p.11). Luego el desarrollo del PMA se puede evaluar según la manifestación y el comportamiento de los estudiantes, en escenarios que impliquen actividad matemática.

En este sentido, Rubinstein (1965), afirma que [...] “la actividad psíquica es una actividad cerebral que constituye, a la vez, un reflejo y un conocimiento del mundo. Todo fenómeno psíquico participa siempre de ambas cualidades” (p.11). El hecho de que la actividad psíquica sea un reflejo, significa también que el reflejo es una actividad y un proceso. El estudiante, el conocimiento de la disciplina AM y el desarrollo del PMA son mutuamente interdependientes y este se construye mediante la interacción personal y social, mediatizado por los textos y otras representaciones lingüísticas, simbólicas e icónicas. Desde este punto de vista, el desarrollo del PMA y la comprensión subjetiva de la Matemática, se derivan del diálogo y de las negociaciones interpersonales.

En la concepción del PEA desarrollador del AM a partir del Enfoque Histórico Cultural, se puede comprender el papel de cada uno de los sujetos que participan en el aula de clase, al considerar que el PMA tiene un carácter activo en la regulación de la actuación, y se determina histórica y socialmente en su origen y desarrollo en la medida en que se forma en el proceso de la actividad matemática y la comunicación que el sujeto establece con el medio socio-histórico en que vive.

Los fundamentos sociológicos de la investigación, estuvieron determinados desde la Sociología de la Educación, ya que aportan una visión de las relaciones que se establecen en la sociedad. Se ha observado el desarrollo del PMA como un fenómeno social que requiere de la relación dialéctica desempeño-investigación-ocupación. Esto demanda que dicho proceso responda a las exigencias de la sociedad cubana en la actualidad y que la formación académica de los estudiantes en el cumplimiento de



## *Capítulo II*

su función social, haga una contribución al proceso de socialización de estos a partir de sus individualidades y objetivos.

Desde el punto de vista didáctico, la potenciación del PMA se sustenta en el PEA desarrollador de la disciplina AM y se intenciona desde los objetivos; para alcanzar dichos objetivos es necesaria la utilización de métodos productivos que permitan el tránsito progresivo de los estudiantes de sus niveles de desarrollo actual a los niveles de desarrollo potencial y permitan elevar la implicación activa y creadora de los estudiantes en el aprendizaje de los contenidos matemáticos asociados al concepto de límite.

El contenido de la disciplina AM debe trabajarse teniendo en cuenta las potencialidades de la descomposición genética de conceptos para la efectividad del método de enseñanza-aprendizaje, además debe presentarse a los estudiantes mediante coordinaciones de registros semióticos de forma consciente, intencionada y explícita, para ello es de reconocida importancia el trabajo con los mapas conceptuales.

### *Principios didácticos*

Los principios didácticos son aquellas regularidades esenciales que rigen el enseñar y el aprender y que permiten al educador dirigir científicamente el desarrollo integral de la personalidad de los estudiantes. En este caso se toman como referencia los principios didácticos para una educación desarrolladora propuestos por Silvestre y Zilverstein (2003).

El cumplimiento de los principios didácticos que se asumen en esta tesis brinda la posibilidad de potenciar las características esenciales del PMA desde el PEA de la disciplina AM y en consecuencia se contribuye al desarrollo de este tipo de pensamiento. A continuación se presentan los principios asumidos y su contextualización a la investigación que se realiza.

- ✓ *Diagnóstico integral de la preparación del estudiante para las exigencias del proceso de enseñanza aprendizaje, nivel de logros y potencialidades en el contenido de aprendizaje, desarrollo intelectual y valorativo.* Para tener en cuenta este principio en el desarrollo del PMA, el profesor debe conocer el nivel de desarrollo alcanzado por el estudiante en las características esenciales de su

## Capítulo II

desarrollo y las potencialidades de los contenidos de la disciplina AM para el desarrollo de estas, así como la disposición de los estudiantes para enfrentar las tareas a resolver y el compromiso con su formación profesional.

- ✓ *Estructura del proceso de enseñanza aprendizaje hacia la búsqueda activa del conocimiento por parte del estudiante, teniendo en cuenta las acciones a realizar por este en los momentos de orientación, ejecución y control de la actividad.* Este principio se contextualiza mediante la utilización efectiva de métodos productivos que contribuyan a la apropiación activa y creadora de los contenidos de la disciplina AM, a la vez que desarrolla el pensamiento, para ello es necesario el trabajo con la descomposición genética de conceptos y la coordinación de registros semióticos sustentado en el uso de procedimientos heurísticos, análisis de esquemas conceptuales y modelos gráficos, que potencian el nivel de abstracción y contribuyen a la dirección racional de la actividad cognoscitiva.

Se refiere también a que las acciones a desarrollar en las clases, en las fases de orientación, ejecución y control, deben propiciar con claridad la necesidad de la concientización del estudiante para que distinga las características de los procesos asociados al PMA, lo cual permitirá que estos, desde su individualidad, puedan ejercer el autocontrol de su actividad cognitiva y contribuir a su desarrollo.

- ✓ *Concepción de un sistema de actividades para la búsqueda y exploración del conocimiento del estudiante desde posiciones reflexivas, que estimulen y propicien el desarrollo del pensamiento y la independencia de este.* Para contextualizar este principio, es necesario destacar que el sistema de actividades que se utilice, debe estructurarse sobre la base del trabajo en la Zona de Desarrollo Próximo de los estudiantes, de modo que, en la medida que avanza en su solución, cree su propio sistema de autoayuda, fundamentalmente con el uso de modelos gráficos, procedimientos heurísticos y estrategias cognitivas y metacognitivas.
- ✓ *Desarrollo de formas de actividad y de comunicación colectivas, que favorezcan el desarrollo intelectual, logrando la adecuada interacción de lo individual con lo colectivo en el proceso de aprendizaje.* La aplicación de este principio en esta investigación, se concreta en la necesidad de tener en cuenta la naturaleza histórico-social de la psiquis, para situar tanto al profesor, el estudiante y el

grupo, como mediadores del desarrollo del PMA, teniendo en cuenta que lo externo actúa como fuente del desarrollo interno.

- ✓ *Vínculo del contenido del aprendizaje con la práctica social y estimulación de la valoración por el estudiante en el plano educativo.* Para contextualizar este principio es necesario tener en cuenta la finalidad de la formación del profesor de Matemática, para que el tratamiento de los contenidos del AM y el desarrollo del PMA, sea enfocado desde una perspectiva profesional, donde se destaque el papel de la disciplina AM como un recurso teórico para fundamentar, enriquecer y generalizar la Matemática escolar. Además, se debe propiciar un modo de actuación profesional competente que permita a los estudiantes transmitir modelos para la enseñanza-aprendizaje de la Matemática escolar.

Como *objetivo general* del modelo didáctico se determinó: *desarrollar en los estudiantes un pensamiento matemático avanzado que permita mejoras en el rendimiento académico de los estudiantes en la disciplina Análisis Matemático.*

### **2.3 Caracterización del desarrollo del pensamiento matemático avanzado desde el Análisis Matemático**

En el tratamiento de este aspecto se parte de la caracterización de la disciplina AM dada en el epígrafe 1.4 y de la definición de desarrollo del PMA dada en el epígrafe 1.5 de esta tesis, teniendo en cuenta que para lograr una adecuada instrumentación didáctica de las características esenciales del PMA desde las clases de AM, es necesario integrarlas en las siguientes categorías: *representación en esquemas, visualización lógica y creatividad matemática*, de forma que el proceso de pensamiento transite de lo visual externo a la representación interna y lógica y de ahí a la aplicación creativa de saberes matemáticos; en correspondencia con lo planteado por Ballester et al. (2007) “[...] la vía del *pensamiento matemático* se eleva de lo concreto a lo abstracto y de este nuevamente a lo concreto” (p.78).

#### ***La representación en esquemas***

La representación en esquemas es un proceso mediante el cual el estudiante desarrolla habilidades para la utilización de esquemas y modelos gráficos, como medios auxiliares de apoyo a la dirección racional de

## Capítulo II

la actividad matemática, para visualizar relaciones conceptuales y organizar conocimientos en esquemas. La utilización de esquemas genera imágenes conceptuales que a la vez, viabilizan y potencian el nivel de abstracción para la comprensión de relaciones matemáticas. A continuación, se describen las características esenciales del PMA para el proceso de *representación en esquemas*.

*Nivel de abstracción:* los esquemas gráficos constituyen un medio indispensable para potenciar el nivel de abstracción, en tanto permiten materializar y visualizar relaciones matemáticas complejas, como son los procesos con paso al límite, característicos de la disciplina AM. El uso de esquemas gráficos permite mayor precisión en la determinación de lo esencial y lo no esencial durante los procesos de razonamientos y además, constituyen orientadores lógicos para la dirección racional de la actividad matemática.

*Representación conceptual:* es uno de los principales recursos para la ilustración gráfica de conceptos, procesos y razonamientos, de forma que permita al estudiante visualizar la mayor cantidad de relaciones y cualidades esenciales de los objetos matemáticos. Dicho recurso constituye una forma de potenciar el necesario nivel de abstracción que debe realizar el estudiante, para comprender contenidos matemáticos relacionados con el concepto de límite.

*Definición de conceptos:* durante el proceso de definición de conceptos, las ideas esenciales deben formularse en un lenguaje natural, claro y familiar al estudiante, que transmitan coherencia y sentido lógico; en tal caso, la utilización de esquemas potencia la formación de una imagen conceptual en el estudiante. Posteriormente debe convertir dichas ideas no formalizadas en ideas formalizadas, con la utilización de la terminología matemática establecida.

*Formalización del conocimiento:* a partir de razonamientos apoyados en representaciones y esquemas, se producen múltiples ideas que emergen de la utilización de procedimientos heurísticos, las cuales es necesario formalizar para alcanzar los objetivos previstos. En este sentido, adquiere reconocida importancia la correspondencia entre el lenguaje verbal del estudiante y la forma en que este comunica dicho lenguaje al utilizar símbolos matemáticos.

*Demostración matemática:* los esquemas gráficos, como construcciones auxiliares, constituyen una herramienta poderosa en la búsqueda de vías de demostración; estos viabilizan ideas novedosas, transforman lo complejo en simple e imprimen significatividad al proceso de demostración.

### ***La visualización lógica***

Según Monge (2013), se puede entender como visualización, “[...] la designación de todos los medios gráficos que pueden ser usados para la construcción y transmisión de ideas complejas (...) además la visualización combina métodos de visualización de la información, técnicas didácticas, cognición visual e investigación en comunicación visual” (p.38). En este caso, se considera que la visualización lógica es la habilidad de percibir, comprender y representar la estructura lógica que subyace en las proposiciones matemáticas, se expresa en la coordinación de registros semióticos y se desarrolla sobre la base de combinaciones biunívocas entre el fundamento lógico formal y la formalización del conocimiento.

Siempre que el estudiante adquiera un representante semiótico, es necesario que esté asociado a un proceso de razonamiento lógico que lo conecte de forma óptima a la estructura cognitiva precedente. Para lograr que el estudiante incorpore dichas habilidades en la dirección de la actividad matemática, hay que tener presente que las formas de razonamientos nacen y se desarrollan durante la formación conceptual y el proceso de apropiación de nuevos saberes.

*Nivel de abstracción:* se manifiesta en la capacidad del estudiante para percibir y comprender estructuras lógicas en proposiciones matemáticas. La profundidad de abstracción y lo complejo están dados por la cantidad de proposiciones componentes, por la cantidad de conceptos que necesiten ser analizados en la búsqueda de lo esencial, por la integración lógica de cualidades esenciales en la consecución del objetivo, entre otras.

*Representación conceptual:* el análisis lógico de proposiciones matemáticas, puede ser esquematizado mediante diagramas donde se representen las relaciones que subyacen en dichas proposiciones y que son aportadas por los conceptos componentes. En tal caso, los esquemas conjuntistas resultan de vital importancia para diferenciar entre condición suficiente, necesaria o necesaria y suficiente. Las relaciones

gráficas también resultan importantes para determinar la estructura de proposiciones compuestas, antes de ser analizadas desde la lógica formal.

*Definición de conceptos:* la visualización lógica durante el proceso de definición de conceptos se manifiesta entre el nivel de relación que exista entre la imagen del concepto y la definición del mismo. En tal caso los razonamientos lógicos que originan el concepto se sintetizan en la propia definición. Además, el sentido lógico depende del significado y de la coherencia de la formalización del conocimiento utilizada para definir.

Según la idea anterior, la definición de un concepto contiene una relación lógica externa que permite vincular la definición con otros contenidos matemáticos y una relación lógica interna que articula cualidades esenciales del concepto definido. En ambos casos, la descomposición genética de conceptos revela tales relaciones.

*Formalización del conocimiento:* el contenido lógico de las proposiciones matemáticas se encuentra codificado en la formalización de las mismas y la coherencia lógica se encuentra en la cadena de símbolos semióticos institucionalizados para representar los contenidos que se enseñan. De esta manera la forma en que los estudiantes comunican sus ideas manifiesta la lógica de sus razonamientos.

*Demostración matemática:* la visualización lógica se evidencia en la capacidad del estudiante para percibir y comprender la estructura lógica formal de posibles vías de demostración. La comprensión de dicha estructura lógica, propicia el tipo de demostración, la elección de procedimientos y la forma en que se expone el proceso de demostración.

### **La creatividad matemática**

La creatividad matemática, en mayor o menor medida, está presente en el PEA de la Matemática. Las definiciones de creatividad propuestas por diversos investigadores se pueden clasificar en dos tipos: las que se relacionan con el producto final y las que se relacionan con el proceso.

## Capítulo II

Desde el punto de vista del producto final, Chamberlin y Moon (2005), la describen como la habilidad excepcional de generar soluciones útiles y originales para los problemas; según Sriraman (2009), es suficiente con definir la creatividad matemática como la habilidad de producir un trabajo original.

La creatividad matemática como proceso, se entiende compuesta por tres componentes: fluidez, flexibilidad y originalidad. En el caso de la resolución de problemas, por ejemplo, la fluidez se asocia con el número de respuestas correctas que un estudiante da a un problema; la flexibilidad, está asociada a la cantidad de estrategias de resolución de problemas y la originalidad, está asociada al número de soluciones propuestas que muy pocos o nadie ha propuesto antes (Sánchez y Font, 2017, p.5).

Además, según Robaina (2018), desde la disciplina Análisis Matemático se puede contribuir a la formación de un profesional creativo en su desempeño, para lo cual debe trabajarse en función de lograr la independencia cognoscitiva de los estudiantes y el desarrollo de un pensamiento lógico y flexible, que propicie dar soluciones originales a problemas académicos y de la práctica pedagógica.

La creatividad matemática se manifiesta en la capacidad del estudiante para realizar tareas matemáticas de forma flexible, original e independiente. Es efecto de la integración y desarrollo adecuado de las características esenciales del PMA, las cuales se conciben como:

*El nivel de abstracción:* se manifiesta en la capacidad del estudiante para articular de forma creativa las cualidades esenciales y obviar las no esenciales, a cualquier nivel de profundidad, según la jerarquización de los conceptos implicados en el desarrollo de una tarea matemática.

La creatividad matemática, depende de que el estudiante pueda visualizar, en la estructura interna de objetos matemáticos, los razonamientos que dieron origen a dichos objetos e identificar posibles formas de aplicación en nuevas situaciones matemáticas.

*La representación conceptual:* la imagen de conceptos representados y relacionados gráficamente, flexibilizan la actividad racional de los estudiantes. Además, potencian la originalidad en la búsqueda de soluciones a problemas matemáticos.

*La definición de conceptos:* para el desarrollo de la creatividad matemática es necesario una adecuada formación de conceptos de forma que el estudiante pueda hacer uso eficiente de las definiciones. En tal caso, resulta importante la identificación de términos o formas proposicionales que aparecen tanto en el definiendum (lo que debe definirse), como en el definiens (lo que define).

*La formalización del conocimiento:* determina el nivel de originalidad alcanzado por el estudiante, en tanto constituye la forma en que el estudiante expresa sus ideas en el lenguaje formal de la Matemática. Además, la creatividad se expresa en la capacidad del estudiante para concretar situaciones problemáticas en un modelo matemático.

*La demostración matemática:* constituye un medio por excelencia para el desarrollo de la creatividad matemática, en tanto demanda del estudiante persistencia, laboriosidad, flexibilidad, independencia y originalidad, en la elección y desarrollo del método más adecuado para la demostración matemática.

### **2.4 Actividad didáctica para el desarrollo del pensamiento matemático avanzado**

A partir de los análisis que se hicieron en el epígrafe 1.4 de esta tesis sobre los objetivos de la disciplina AM y de la finalidad del modelo didáctico que se propone en relación con el pensamiento y su desarrollo, es necesario tener en cuenta que el cumplimiento del objetivo no se reduce solo al dominio de saberes, ignorando el desarrollo de los procesos cognitivos implicados en el PEA, en especial los relacionados con el PMA.

La intencionalidad de los objetivos debe estar dirigida al desarrollo consciente de las características esenciales del PMA como forma superior del pensamiento matemático, lo cual debe tener a su base las dimensiones del aprendizaje desarrollador, los procedimientos y estrategias, tanto cognitivas como metacognitivas y una conducta en correspondencia con los principios y normas de la ética profesional.

Por la complejidad que entraña potenciar el desarrollo del PMA y el PEA de los contenidos de la disciplina AM, en esta tesis se propone organizar dichos contenidos en tres núcleos conceptuales: *conceptos y definiciones*, *operaciones y funciones*, y *relaciones métricas*, los cuales conforman una sistema de conocimientos para el desarrollo de actividades matemáticas.



## Capítulo II

- ✓ *Conceptos y definiciones:* en este núcleo se agrupan los conceptos y definiciones; su función es proporcionar cualidades esenciales y la formalización del conocimiento matemático, durante la realización de actividades matemáticas. Cuando se utilizan conceptos para la construcción o búsqueda de nuevos conocimientos, necesariamente se usan ciertas formalizaciones de estos, que devienen en definiciones o caracterizaciones. Luego, este núcleo aporta formalizaciones sucesivas acompañadas de cualidades esenciales que emergen durante los procesos de razonamientos.
- ✓ *Operaciones y funciones:* en este núcleo se agrupan las nociones de operaciones aritméticas, igualdades, desigualdades, relaciones funcionales, procesos con paso al límite y las estructuras lógico-formales que se utilizan en los diferentes tipos de procedimientos. Proporciona las articulaciones lógicas que estructuran los nuevos conocimientos matemáticos que se construyen.
- ✓ *Relaciones métricas:* este núcleo proporciona las nociones geométricas de cantidad numérica, distancia, proximidad, optimización. Aporta elementos geométricos que ayudan a comprender el significado de ciertos procesos con paso al límite y de convergencia. El trabajo didáctico con este núcleo, facilita la coordinación entre los registros de representación semiótica: algebraico y geométrico, ya que a partir de modelos gráficos o esquemas, se formalizan ideas en términos algebraicos.

Esta concepción de núcleo conceptual es muy parecida a la noción de nodo cognitivo pero a diferencia de este no se centra en un concepto o habilidad, sino que dichos núcleos constituyen tres dimensiones (lo conceptual-formal, lo operacional y lo métrico) que aportan elementos para la construcción, mediante configuraciones, de objetos matemáticos con paso al límite, propios de la disciplina AM.

Los *núcleos conceptuales* constituyen una herramienta teórica que permite determinar la composición genética de los contenidos relacionados con procesos de paso al límite y determinar las acciones didácticas necesarias para que los estudiantes comprendan y construyan con significatividad los conocimientos de la disciplina AM. Estos son unidades de conocimientos alrededor de los cuales se forma, actualiza y acumula información. Tienen como función organizar los sistemas de conocimientos en esquemas y proporcionar propiedades esenciales para la formación de nuevos conocimientos.

## Capítulo II

La consistencia de dichos núcleos, en el conocimiento del estudiante, radica en el nivel de interrelación sistémica entre sus componentes, el cual se fortalece a partir de experiencias durante el desarrollo de tareas matemáticas. Las formas de pensamiento se originan cuando se realizan configuraciones coherentes, sistémicas y significativas entre cualidades esenciales que emergen de los núcleos conceptuales; cada nueva configuración origina objetos matemáticos, ya sea conceptos, definiciones, operaciones, formas de razonamientos, teoremas, juicios y vías de solución, etc.

El Análisis Matemático es una de las disciplinas en la que mayores dificultades académicas presentan los estudiantes, debido a la complejidad que presentan sus contenidos, determinada por la presencia de conceptos en los que intervienen procesos con paso al límite (límite funcional, derivada de una función, integral de una función, series, entre otros), para los cuales es necesario un alto nivel de abstracción.

Como se señaló en el epígrafe 1.5, los estudiantes presentan dificultades en la utilización de las definiciones, en la formalización del conocimiento, en la modelación gráfica y analítica de ideas para la posible solución de tareas propias de AM, así como las nociones de equivalencia en una proximidad infinitesimal de un punto, la búsqueda de expresiones adecuadas para mayorar y minorar.

Las dificultades anteriores constituyen obstáculos epistemológicos que es necesarios atenuar mediante un adecuado enfoque metodológico de la disciplina, sin embargo, como se comprobó en el epígrafe 1.5, la estructuración del PEA del AM, sobre la base de los métodos productivos tradicionales, no ha permitido aún hacer frente con la efectividad esperada a las limitaciones de los estudiantes en dicha disciplina.

Ante estas limitaciones surgen las siguientes interrogantes: ¿cómo construyen los estudiantes los objetos matemáticos con paso al límite?, ¿cómo los estudiantes asocian el significado de un símbolo, durante el proceso de elaboración conceptual, formalización y definición? y ¿cómo potenciar, desde la clase de AM, las características esenciales del PMA?

Para dar respuesta a estas interrogantes resulta necesario, entonces, replantearse el enfoque metodológico general de la disciplina que articule de forma íntegra las categorías: *representación en esquemas*, *visualización lógica*, y *creatividad matemática* de manera que formen un sistema donde se dé

## Capítulo II

una *relación de dependencia*, en tanto los esquemas gráficos sirven como medios auxiliares para visualizar relaciones lógicas entre contenidos, y estas determinan el nivel de independencia, flexibilidad y originalidad durante la actividad cognitiva de los estudiantes.

A partir de la relación anterior se genera una *relación de orden cognitivo* que se manifiesta en la descripción de las características esenciales del PMA en cada una de las categorías como un proceso horizontal y además, las características esenciales del PMA se conciben transversalmente en las categorías, lo cual determina diferentes niveles de desarrollo para dichas características.

También se manifiesta una *relación de orden didáctico* que evidencia la secuencia ordenada en la que se trabaja, desde la clase y desde los sistemas de clases, las tres categorías del PMA; en este caso su enseñanza transita de lo simple a lo complejo; desde la producción activa de conocimientos a la sistematización y de ahí a la aplicación de estos.

Dichas relaciones se fundamentan en los siguientes aspectos:

- ✓ La utilización de esquemas gráficos y modelos de apoyo a los razonamientos, que potencien el nivel de abstracción.
- ✓ La visualización y comprensión de la estructura lógica formal que subyace en las proposiciones matemáticas.
- ✓ La significatividad del aprendizaje desarrollador de conceptos mediante la coordinación de registros de representación semiótica.
- ✓ La generalización creativa de habilidades para la resolución y formulación de problemas matemáticos.

Para la apropiación productiva de los contenidos de la disciplina AM, es necesario que la utilización de métodos de enseñanza-aprendizaje tributen a la *formación conceptual desde su composición genética, formalización significativa de saberes, definición formal, obtención y demostración de teoremas, obtención y utilización de procedimientos* y a la *formulación y resolución de problemas*, a partir del trabajo sistemático con la *descomposición genética de conceptos, la coordinación de registros de representación*

*semiótica y la utilización de mapas conceptuales.* Para acompañar este enfoque metodológico se propone un método productivo de enseñanza-aprendizaje que se ha denominado *método genético-constructivo*.

#### **2.4.1 El método genético-constructivo para las clases de Análisis Matemático**

En esta tesis el *método genético-constructivo* se define como: las “*acciones secuenciales y sistémicas que realizan, tanto el profesor como el estudiante, para el desarrollo de configuraciones entre núcleos conceptuales, sobre la base de la descomposición genética de conceptos y la coordinación de registros semióticos*”. Las configuraciones constituyen las relaciones que se establecen entre las cualidades esenciales emergentes de los *núcleos conceptuales*.

En el *método genético-constructivo*, lo genético no necesariamente está determinado por la formación histórica de un determinado objeto matemático, sino además, por la estructura interna y el sistema de conocimientos relacionados con dicho objeto, lo cual puede determinarse mediante la descomposición genética de conceptos; lo constructivo está dado por la posibilidad de construir dicho objeto matemático a partir de sus componentes genéticos, en este caso la construcción de conocimientos se concibe como configuraciones. Este método no niega la existencia del resto de los métodos que habitualmente se usan en el PEA del AM, sino que por el contrario se nutre de ellos para el desarrollo de cada una de sus fases y acciones.

En esta tesis el *método genético-constructivo* fue creado para potenciar el desarrollo del PMA desde la clase de AM, las fases de dicho método contienen elementos de la estructuración lógica del desarrollo de la clase (la activación de los contenidos anteriores, la motivación por el estudio de lo nuevo, el tratamiento de nuevos contenidos y su sistematización) y tributan a las dimensiones del aprendizaje desarrollador (activación-regulación, la significatividad y la motivación para aprender). Las fases del método son: *activación-motivación, configuración-significatividad y la aplicación-creatividad*.

La fase *activación-motivación*, es un proceso que se realiza en el marco introductorio de la clase o en la etapa de *orientación hacia el problema*; para ello el profesor moviliza conocimientos esenciales, motiva y suscita necesidades de aprendizaje en el estudiante. La *representación en esquemas*, es útil para relacionar visualmente los contenidos fundamentales para el desarrollo de la clase.

## Capítulo II

A continuación, se describen los aspectos fundamentales para esta fase:

- ✓ a partir de situaciones problemáticas, el profesor debe motivar y provocar necesidad cognitiva en el estudiante y este debe reconocer la falta e importancia de nuevos conocimientos en sus saberes, o aceptar el reto de desarrollar tareas matemáticas.
- ✓ el profesor, a través de impulsos y procedimientos heurísticos debe lograr, en los estudiantes, la activación de conocimientos esenciales a partir del trabajo con los *núcleos conceptuales*. Dichos conocimientos deben ser esquematizados en mapas conceptuales y utilizar para ello distintas representaciones semióticas, de manera que el estudiante visualice relaciones conceptuales.

Durante la activación se trabaja el proceso de abstracción reflexiva, a partir de la priorización mental de las cualidades esenciales que aportan los núcleos conceptuales, estas deben ser representadas en diferentes registros semióticos.

Después de activar los *núcleos conceptuales*:

- ✓ el profesor induce en los estudiantes, mediante procedimientos heurísticos, la *abstracción reflexiva* (porque se priorizan y determinan las propiedades esenciales de los conceptos que se utilizarán durante los razonamientos) y de forma conjunta con los estudiantes desarrollan modelos gráficos, para visualizar relaciones y cualidades esenciales, con el objetivo de potenciar el nivel de abstracción.

La fase de *configuración-significatividad*, es parte del desarrollo de la clase o del trabajo en el problema y solución de este; es un proceso donde se establecen relaciones significativas y conexiones entre elementos esenciales que emergen de la *activación* de los *núcleos conceptuales*, las configuraciones devienen en nuevos objetos matemáticos, en procedimientos, en la vía de solución o en la formulación de problemas.

Para lograr una adecuada *significatividad* del contenido mediante una *configuración*, hay que articular de forma íntegra el trabajo con las categorías *representación en esquemas*, *visualización lógica*, y *creatividad matemática*, según los siguientes aspectos:

## Capítulo II

- ✓ *relacionar* propiedades esenciales de los núcleos conceptuales y partir de estas establecer conexiones. Dichas conexiones en su estado inicial, se encuentran como ideas intuitivas no formalizadas que al integrarse, producen nuevos objetos matemáticos, procedimientos, vías de solución y formas de razonamientos. En este caso se necesita de un alto grado de visualización gráfica para potenciar el nivel de abstracción y la significatividad.
- ✓ *formalización*: en este caso, producto del desarrollo de una tarea matemática determinada, emergen ideas matemáticas que en su estado inicial son intuitivas no formalizadas y por tanto, es necesario que se les asignen referentes en distintos registros semióticos; posteriormente se valora y analiza la efectividad del razonamiento y se resaltan los nuevos conocimientos y propiedades.
- ✓ *abstracción reflexiva*: se manifiesta en la priorización mental de características esenciales, resultantes del razonamiento realizado en el desarrollo de una determinada tarea matemática. En este caso, el estudiante debe visualizar las propiedades generales de los nuevos saberes, establecer relaciones con otros conocimientos y reconocer los procedimientos asociados a las posibles formas de aplicación.
- ✓ *integración de nuevos saberes matemáticos a los núcleos conceptuales*: mediante este proceso se enriquece el contenido de los núcleos conceptuales con los saberes matemáticos que resultan de las configuraciones realizadas, esto se realiza con la utilización de mapas conceptuales para visualizar la relación entre contenidos y mediante el desarrollo de habilidades en la resolución de tareas matemáticas.

Los objetos matemáticos se conforman por actividad del pensamiento y están compuestos por una red de conocimientos, cuando dicha red de conocimientos se expresa mediante un esquema gráfico, este constituye un mapa conceptual. Al intentar incorporar un nuevo conocimiento a dicha red hay que tener presente la estructura cognitiva precedente, de forma que no existan contradicciones lógicas entre lo nuevo y lo que ya sabe el estudiante. Durante el proceso de apropiación, las conexiones pueden resultar débiles, cuando se tiende a mecanizar el aprendizaje. Por tanto, es necesario que durante el proceso de configuración, los nuevos saberes se relacionen con la estructura lógica del conocimiento precedente de los estudiantes.

Una de las acciones cognitivo-instrumentales que declara Pérez et al. (2004) es *aplicar* y la define como “[...] utilizar eficazmente la información y la experiencia previamente acumulada en nuevas y diferentes situaciones, que lo permitan y lo exijan” (p.91). En este caso se concibe la *fase de aplicación-creatividad*, como un proceso en el que se ponen en práctica los conocimientos adquiridos y se desarrollan habilidades mediante la realización de tareas matemáticas con un relativo nivel de *independencia, fluidez, flexibilidad, profundidad y originalidad*; dicha fase contiene dos aspectos fundamentales:

1. Análisis de la *tarea matemática*, para identificar los objetos matemáticos implicados, propiedades y relaciones con el objetivo de la actividad.

En dicho aspecto, el estudiante activa sus conocimientos para aplicarlos tanto a la apropiación de nuevos conocimientos, como a la formulación y resolución de ejercicios y problemas. A partir de dicho análisis, es posible lograr una *visualización lógica* de los razonamientos y procedimientos que dieron origen a los objetos matemáticos implicados en el problema; estos razonamientos y procedimientos deben ser tratados desde la *representación en esquemas*, lo cual propicia enfoques creativos para la búsqueda de posibles vías de soluciones.

2. Aplicación de procedimientos heurísticos y estrategias metacognitivas, para el desarrollo de tareas matemáticas.
  - ✓ El primer paso, es tratar de ordenar el sistema de conocimientos en función del objetivo de la tarea matemática; en este caso, el estudiante trata de visualizar posibles ordenaciones. Luego, la mayor actividad del PMA se enfoca en buscar posibles conexiones cognitivas que se aproximen a una vía de solución.
  - ✓ Si el estudiante logra visualizar una posible ordenación, esta clasifica para ser la vía de solución y si lo es, entonces está en presencia de un ejercicio rutinario para el cual ya se conoce un procedimiento de solución. En este caso los obstáculos cognitivos pueden ser insuficiencia en el sistema de conocimientos o en los procedimientos algorítmicos y heurísticos que se utilicen para organizar la información y solucionar.

## Capítulo II

- ✓ Si el estudiante *no logra visualizar una posible organización cognitiva de sus saberes* en correspondencia con el objetivo de la tarea matemática, está en presencia de un *problema*. En este caso, debe comenzar a probar posibles ordenaciones lógicas de sus conocimientos que se aproximen a la solución del problema, mediante la utilización de procedimientos heurísticos y estrategias metacognitivas, hasta lograr visualizar una posible solución y en tal caso, el problema dejó de ser problema.

Es importante que el profesor, durante el desarrollo de tareas matemáticas, evite los llamados *deslizamientos metadidácticos* en el momento de brindar impulsos al estudiante; dichos deslizamientos según Brousseau y D'Amore (2018), consisten en “[...] cambiar el objeto de enseñanza de una actividad o de una noción, por uno de sus medios de control (...)” (p.50). Por ejemplo, se manifiestan al sustituir la corrección de un error, automáticamente con la enseñanza de la respuesta correcta; esto limita el esfuerzo intelectual del estudiante para descubrir el conocimiento.

La complejidad en el desarrollo de tareas matemáticas es subjetiva, está dada por la cantidad de interacciones de conocimientos a organizar y por las exigencias de la actividad. El *pensamiento matemático* adquiere cualidad de *avanzado*, porque el estudiante tiene que ordenar, racionalizar y relacionar un gran cúmulo de conocimientos, tiene que descubrir nuevas relaciones mediante variados procedimientos heurísticos, estrategias metacognitivas, entre otros recursos. Luego enseñar a pensar al estudiante, es dotarlo de estrategias que le permitan buscar linealidad, divergencia, organización y precisión en su sistema de conocimientos para la resolución de problemas.

El estudiante que puede establecer un orden en el sistema de saberes implicados en la resolución de un problema y cómo estos pueden ser organizados para alcanzar el objetivo, ha logrado visualizar una posible solución al problema. Este tipo de estudiante generalmente en su pensamiento analiza el objetivo general del problema, comprende el tipo de respuesta y luego retorna al principio del problema y comienza a dar pasos de avance, para comparar sucesivamente su ordenación de conocimientos inicial (situación



## Capítulo II

problémica) y la posible reordenación final (solución); además, en cada paso de los procedimientos utilizados, compara si la reorganización de conocimientos se acerca más a la solución del problema.

Para instrumentar las tres fases del *método genético-constructivo* descritas anteriormente desde la clase de Análisis Matemático, se determinaron las siguientes acciones:

1. *Identificación de los núcleos conceptuales del conocimiento sobre los cuales se realizarán las configuraciones necesarias, según el objetivo de la actividad matemática.* El profesor a través de preguntas y procedimientos heurísticos; reactiva y moviliza los conocimientos necesarios para la actividad matemática. Los *estudiantes* participan de forma activa en la identificación, clasificación y organización de conocimientos en torno a los núcleos conceptuales.
2. *Identificación de los componentes y propiedades que aporta cada núcleo conceptual al conocimiento matemático.* El profesor esquematiza en pizarra, mediante mapas conceptuales, los elementos que aportan los *estudiantes*, estos caracterizan los componentes, propiedades y relaciones que se dan entre los núcleos conceptuales.
3. *Análisis de los componentes que aporta cada núcleo conceptual para abstraer lo esencial y luego sintetizar en un todo.* El profesor induce el análisis de los componentes determinados en los núcleos conceptuales, promueve la búsqueda de lo que es esencial según el objetivo de la actividad matemática. Los *estudiantes* analizan y determinan aspectos esenciales, según las orientaciones del profesor.
4. *Establecimiento de nuevas configuraciones y conexiones entre los componentes de los núcleos conceptuales en función del objetivo de la actividad.* El profesor promueve posibilidades de construir nuevas relaciones entre los componentes esenciales, ejemplifica, e induce a la reflexión de los *estudiantes*. Los *estudiantes* observan, preguntan, debaten, cuestionan y proponen puntos de vista.
5. *Formalización de los conocimientos que surgen de las configuraciones entre los núcleos conceptuales, primero en un lenguaje personalizado y luego en la terminología convencional.* El profesor propone los signos convencionales para denotar y relacionar los nuevos conocimientos, explica las ventajas para

## Capítulo II

su utilización. Los *estudiantes* transforman el lenguaje personalizado en lenguaje formal mediante la utilización de la terminología convencional.

6. *Ejemplificación, en distintos registros de representación semiótica, de las configuraciones realizadas entre los núcleos conceptuales.* El *profesor* propone ejemplos, en diferentes registros semióticos, de representantes y no representantes de los objetos matemáticos estudiados. Los *estudiantes* identifican el significado de objetos matemáticos en diferentes registros semióticos y además construyen ejemplos y contraejemplos.
7. *Formulación y resolución de problemas que propicien nuevas configuraciones entre los núcleos conceptuales, a diferentes niveles de asimilación.* El *profesor* propone actividades que relacionen nuevos conocimientos contruidos con los precedentes. Los *estudiantes* formulan y resuelven problemas.
8. *Visualización mediante mapas conceptuales, de la posición, función y relación de los nuevos conocimientos aprendidos, con los núcleos conceptuales que le dieron origen.* El *profesor* utiliza mapas conceptuales para visualizar las conexiones de los nuevos conocimientos con los anteriores. Los *estudiantes* explican, relacionan y fundamentan las relaciones de los nuevos conocimientos con los anteriores.

En resumen, con la utilización del método genético-constructivo se busca que los *estudiantes* más que consumir y acumular información, puedan buscarla y producirla, problematizarla, criticarla, transformarla y utilizarla de manera consciente y creadora para tomar decisiones, resolver nuevos problemas y situaciones, y erigirla como base para los nuevos y constantes aprendizajes.

Para lograr eficiencia en la implementación del *método genético-constructivo* y en consecuencia, potenciar el desarrollo del PMA, es necesario planificar con coherencia cada subsistema de clase. A continuación se caracterizan las formas de organización: *la conferencia, la consulta, la clase práctica, el taller y la práctica de laboratorio*, según los siguientes criterios.

## Capítulo II

En la *conferencia*, los estudiantes con participación activa y guiados por el profesor, se apropian de los fundamentos científico-técnicos de los contenidos del AM; en la introducción predomina la fase de activación-motivación y la realización de las acciones 1 y 2; en el desarrollo de la conferencia predomina la fase de configuración-significatividad, en esta, la producción de nuevos conocimientos se realiza a través de configuraciones y está relacionada con el desarrollo de las acciones de la 3 a la 7, aunque el desarrollo de esta última acción es parcial, pues se profundiza en las clases prácticas; en las conclusiones se desarrolla la acción 8 en forma de síntesis generalizada. Dicha organización puede variar, a consideración del profesor, en función de los objetivos que se persigan en la conferencia.

Después del desarrollo de la conferencia debe existir un tiempo donde los estudiantes realicen un estudio individual sobre lo aprendido, según la guía de estudio orientada en la conferencia, con el objetivo de enriquecer sus conocimientos mediante la búsqueda de información y la resolución de ejercicios y problemas.

Posteriormente el profesor realiza una *consulta*, esta se debe planificar con el objetivo de aclarar dudas a los estudiantes, que pueden quedar desde la conferencia y las que aparecen durante el estudio individual, es un espacio donde el profesor trabaja las principales debilidades cognitivas de los estudiantes y profundiza en la aplicación del contenido y en la utilización de métodos de trabajo abordados en la conferencia.

En el desarrollo de las *clases prácticas* los estudiantes ejecutan, amplían, profundizan, integran y generalizan métodos de trabajo característicos del Análisis Matemático, predomina la forma metodológica de trabajo independiente, en este caso las fases y acciones del método genético-constructivo se asocian al Programa Heurístico General, en la orientación hacia el problema las acciones 1 y 2; para el trabajo en el problema, la acción 3; en la solución al problema las acciones 4 y 5; y utilizar la acción 8 para apoyar la evaluación de la solución y de la vía; en este caso todo el proceso anterior se enmarca dentro de la acción 7. Además las clases prácticas pueden ser planificadas de tipo *seminario* donde se promueva el debate, el diálogo y la colaboración en equipo.

En *el taller*, los estudiantes deben aplicar los conocimientos adquiridos para el desarrollo de tareas matemáticas propias de la profesión, a partir de la reflexión grupal. Las actividades planificadas deben

estar intencionadas a la fundamentación de la Matemática escolar mediante los contenidos del AM. Además, es necesario establecer un vínculo entre los componentes académico, investigativo y laboral sobre la base de la inter e intradisciplinariedad.

La *práctica de laboratorio*, debe enfocarse fundamentalmente en el uso de asistente matemáticos como el Derive y el GeoGebra, con el objetivo de que los estudiantes visualicen procesos de graficación, modelación, experimenten en el comportamiento de procesos con paso al límite, generalicen habilidades, métodos y técnicas de trabajo y de la investigación científica, amplíen, profundicen, consoliden y comprueben los fundamentos teóricos de la disciplina.

La *evaluación*, se concibe como un proceso y componente del PEA del AM, dirigido a valorar el logro de los objetivos mediante la comprobación de la calidad de los resultados del aprendizaje y nivel de desarrollo del PMA. Al evaluar, se analizan los cambios cualitativos operados en el estudiante sistemáticamente en su rendimiento académico y en el desarrollo de su personalidad, en relación con el modelo ideal concretado en los objetivos, lo que permite comprobar la efectividad del proceso.

Se consideran como funciones de la evaluación: la *función de control*, la *función instructiva*, la *función educativa*, la *función de diagnóstico* y la *función de desarrollo*. Como tipos de evaluación (de forma oral o escrita) se emplea la *evaluación sistemática*, la *evaluación parcial* y la *evaluación final*.

### **2.4.2 Estructuración didáctica del desarrollo del pensamiento matemático avanzado**

Potenciar el desarrollo del PMA desde la disciplina Análisis Matemático, resulta un proceso complejo y particular, determinado por la presencia de contenidos con paso al límite. Además, más allá de aprender dichos contenidos, este tipo de pensamiento es indispensable para el desarrollo de la futura actividad profesional de los estudiantes.

Para potenciar el desarrollo del PMA, es necesario establecer pautas que caractericen la actividad del profesor y del estudiante, durante el proceso de enseñanza aprendizaje de la disciplina Análisis Matemático; delimitar un período inicial donde se familiarice al estudiante en el trabajo con las características esenciales de este tipo de pensamiento y posteriormente, se deben sistematizar las

## Capítulo II

acciones didácticas y profundizar gradualmente en la complejidad de estas, para lograr madurez y flexibilidad en las acciones mentales.

A continuación se presentan las etapas determinadas en el modelo. En estas, se deben trabajar de forma cíclica y sistemática *la representación en esquemas, la visualización lógica y la creatividad matemática*.

### *Etapas 1: Familiarización con las características del pensamiento matemático avanzado*

Tiene como finalidad *familiarizar a los estudiantes en el trabajo con las características esenciales del PMA, los recursos cognitivos para su desarrollo, las formas de pensar las tareas del Análisis Matemático, y las potencialidades de la representación en esquemas y la visualización lógica para la creatividad matemática, durante el desarrollo de tareas matemáticas*.

Esta es una etapa propedéutica, se desarrollará durante la parte inicial de la disciplina AM, el profesor determina en que período se realizará, puede ser durante toda la asignatura AM I, en una parte de esta, o puede extenderse por más tiempo según el nivel de desarrollo del PMA en los estudiantes. El estudiante debe aprender, de manera consciente, formas de pensar los contenidos de dicha asignatura, además esto se convierte en parte del contenido de aprendizaje, porque se busca que el estudiante pueda reconocer las características del PMA en cada momento de la actividad matemática y para ello, se deben tener en cuenta los siguientes lineamientos:

- ✓ *concientizar* a los estudiantes sobre la necesidad de potenciar el desarrollo de un PMA, para comprender los contenidos asociados al concepto de límite.
- ✓ *motivar* al estudiante a partir de las potencialidades del trabajo con la *representación en esquemas*, la *visualización lógica*, la *creatividad matemática* y la utilización del *método genético-constructivo* para el *aprendizaje desarrollador*.
- ✓ *enseñar* al estudiante a distinguir las características esenciales del PMA, en qué momento de la tarea matemática se ponen de manifiesto y cómo se pueden desarrollar.

## Capítulo II

- ✓ *ofrecer pautas* a los estudiantes de cómo se piensan los contenidos de la disciplina AM y la importancia de buscar orientación racional y control en el desarrollo de tareas matemáticas a partir de la utilización de esquemas, procedimientos heurísticos y estrategias metacognitivas.

Indicaciones metodológicas para el desarrollo de esta etapa

Es necesario que los estudiantes concienticen que para comprender los contenidos del Análisis Matemático se necesitan formas de razonamientos complejas, debido a la presencia de contenidos con paso al límite. Para ello, el profesor debe hacer un bosquejo de los contenidos y describirlos históricamente; a partir de aquí, debe indicar el nivel de complejidad y los posibles obstáculos cognitivos que pueden presentarse a los estudiantes.

El profesor, sustentado en las ideas anteriores, presentará las potencialidades del *método genético-constructivo* como una alternativa para contribuir al desarrollo el PMA y la forma en que este será utilizado durante las clases. Además, el profesor debe indicar la importancia de enseñar a *representar en esquemas* y la necesidad de la *visualización lógica*, como medios indispensables para la dirección racional de la actividad.

Durante esta etapa se pretende desarrollar y fortalecer las estructuras cognitivas de los estudiantes, creadas desde la enseñanza del nivel medio. Es tarea del profesor dotar al estudiante de una organización cognitiva básica, que le permita el control sobre sus propios razonamientos. El profesor debe crear una base orientadora para la acción sobre el análisis de construcciones gráficas, que sirvan como modelos de razonamientos y permitan una visualización generalizada de los sistemas de conceptos.

Las tareas matemáticas deben ser actividades mixtas (que relacionen múltiples contenidos) y sistémicas, que tributen a la resolución y formulación de problemas sencillos, donde se pueda aprovechar de manera intensiva el uso de representaciones en esquemas para ejemplificar nuevos saberes y formas de razonamientos. Además, se deben utilizar la analogía y la transferencia, como recursos indispensables para extrapolar la lógica de lo conocido a lo nuevo por conocer.

Es necesario un riguroso trabajo del profesor, sobre la coordinación entre múltiples registros de representaciones semióticas, resaltando el registro gráfico como medio visual por excelencia para

## *Capítulo II*

comprender relaciones abstractas entre objetos matemáticos. En este sentido, la utilización de mapas conceptuales resulta de vital importancia en tanto constituye un medio de visualización esquemática para la integración de nuevos saberes a la red de conocimientos precedentes.

La enseñanza de los nuevos saberes debe comenzar a una escala elemental, básica, no generalizada. El profesor debe presentar los conceptos, las definiciones, las proposiciones y los razonamientos de la forma más simple posible (sin demasiado formalismo), de manera que puedan ser ejemplificados mediante esquemas y visualizados por el estudiante. El profesor debe incorporar la analogía, como recurso para la enseñanza de nuevos saberes, esto lo puede hacer explicitando la similitud de formas de razonamiento ya conocidas con las nuevas y transferir estas ideas al contexto actual, agregándole el nuevo conocimiento.

El profesor debe diseñar tareas docentes variadas; estas se desarrollan con el objetivo de que el estudiante consolide la formación conceptual, el desarrollo de habilidades y las formas lógicas del pensamiento. En la estructura de las actividades matemáticas, inicialmente el profesor debe trabajar elementos conceptuales; después, preguntas sencillas reproductivas para ejercitar procedimientos de trabajo y finalmente, preguntas sencillas de aplicación.

Las situaciones problemáticas deben contener un alto grado de información, de manera que el estudiante pueda orientarse fácilmente durante todo el proceso y tener control de la actividad. La estructura interna de la actividad debe ser cognitivamente escalonada de lo simple a lo complejo, de forma que el razonamiento y los resultados parciales de este, sean impulsores heurísticos que activen nuevas ideas y orienten los próximos razonamientos. En una misma actividad, entre preguntas consecutivas, no debe haber un alto nivel de complejidad, ni condicionantes entre ellas, de forma que la no realización de alguna de estas, limite la realización de la otra.

La evaluación en esta etapa debe estar intencionada en dos aspectos fundamentales: el nivel de desarrollo alcanzado según los indicadores determinados para cada una de las características esenciales del PMA y el nivel de comprensión por parte del estudiante de dichas características esenciales, durante el desarrollo de la actividad matemática, a partir de su desempeño y de su participación activa.

### *Etapas 2: Sistematización de las características del pensamiento matemático avanzado*

Tiene como finalidad *sistematizar las características esenciales del PMA, mediante el trabajo con la representación en esquemas, la visualización lógica y la creatividad matemática, para lograr en los estudiantes habilidades profesionales asociadas al desarrollo del PMA.*

Según Jara (citado por Leonard-Rodríguez, 2015) la sistematización, “[...] es aquella interpretación crítica de una o varias experiencias que, a partir de su ordenamiento y reconstrucción, descubre o explicita la lógica del proceso vivido, los factores que han intervenido en dicho proceso, cómo se han relacionado entre sí, y por qué lo han hecho de ese modo” (p.108). En este sentido, la sistematización es poner en sistema las características esenciales del desarrollo del PMA, a partir de su ordenación y de su reconstrucción, en el trabajo con los distintos contenidos del Análisis Matemático que va a enfrentar en esta etapa.

Esta etapa comienza una vez que se han alcanzado los objetivos previstos en la primera etapa, el profesor determina y planifica en qué período se desarrollará. Tiene como punto de partida el trabajo sistemático con la *representación en esquemas, la visualización lógica y la creatividad matemática*. El proceso de sistematización va dirigido a preparar al estudiante para que él también aprenda a enseñar y potenciar, a nivel básico, las características esenciales del PMA en su futura profesión, en este sentido se debe trabajar según los lineamientos siguientes:

- ✓ el desarrollo de estrategias metacognitivas y heurísticas para el control del proceso de resolución y formulación de problemas, sustentadas en la descomposición genética de conceptos y en la coordinación de registros semióticos.
- ✓ la apropiación de estilos novedosos de pensar la resolución y la formulación de problemas, a partir de las potencialidades de la *representación en esquemas, la visualización lógica y la creatividad matemática*.
- ✓ El desarrollo del modo de actuación profesional que permita al estudiante poner en práctica acciones didácticas para el trabajo con la *representación en esquemas, la visualización lógica, la creatividad matemática* y la utilización del método genético-constructivo.



## Capítulo II

Indicaciones metodológicas para el desarrollo de esta etapa

El estudiante aprende las formas de enfrentar la resolución y formulación de problemas del Análisis Matemático en la medida en que el profesor realice un trabajo sistemático con la representación en esquemas y la visualización de la lógica formal que subyace en las estructuras matemáticas; dichas formas de trabajo combinadas con procedimientos heurísticos, tributan a la creatividad matemática y al desarrollo de un pensamiento lógico, flexible y divergente.

Los análisis teóricos de conceptos brindan al profesor herramientas para la utilización efectiva del *método de genético-constructivo* y al estudiante, elementos para la dirección racional, la autorregulación y el control de la actividad matemática. En tal caso, el análisis teórico de conceptos concreta y consolida en el estudiante, herramientas cognitivas para resolver y formular situaciones problémicas en un contenido determinado.

Sobre la base del desarrollo alcanzado en la etapa anterior, en esta se profundiza en las características esenciales del PMA. El desarrollo se potencia por la integración sistémica del análisis teórico de conceptos, la coordinación de registros semióticos y la utilización de mapas conceptuales en procedimientos heurísticos; tanto para la apropiación significativa de saberes como para su aplicación creativa a la resolución y a la formulación de problemas. Además, el estudiante debe ser capaz de enseñar dichas formas de razonamiento, en los escenarios de actuación durante la práctica profesional.

Es importante que el profesor desarrolle habilidades que permitan al estudiante abstraer el razonamiento intrínseco que exige la solución de una tarea problémica generalizada, transferirlo a casos particulares y viceversa. Dichas habilidades se desarrollan en la medida en que el estudiante logre hacer modificaciones equivalentes en el enunciado de la actividad; sin cambiar su estructura lógica, estas modificaciones pueden reducir lo complejo a lo simple, a casos más particulares, para que el estudiante identifique formas lógicas de razonamientos y posteriormente, visualice el mismo razonamiento en la actividad inicialmente generalizada.

El profesor actúa solo como facilitador, moderador y evaluador de los enfoques que adoptan los estudiantes, para el desarrollo de una determinada situación problémica. El estudiante debe visualizar, en

## *Capítulo II*

la estructura interna de los objetos matemáticos, los razonamientos que dieron origen a dichos objetos e identificar posibles formas de aplicación en nuevas situaciones problemáticas.

Es necesario que el estudiante tenga una visión generalizada de las cualidades esenciales del objeto y de las diferentes formas en que pueden ser expresadas, de manera que le permitan accionar en cualquier situación problemática, independientemente del registro de representación semiótico predominante. El estudiante debe ser capaz de formular, a partir del concepto y su definición, diferentes ejercicios y problemas.

El profesor debe inducir la argumentación a partir de esquemas gráficos, de manera que el estudiante pueda controlar y justificar la veracidad de los procesos de razonamiento. Durante la búsqueda de posibles vías de demostración, es necesario que los estudiantes apoyen sus deducciones e hipótesis sobre representaciones gráficas, para potenciar el nivel de abstracción.

Los estudiantes deben ser capaces de visualizar la dualidad objeto-proceso, que constituye un proceso de abstracción donde se comprende la dualidad que muchas veces tienen los entes matemáticos; unas veces se manifiestan como proceso y otras veces como objeto. Por ejemplo,  $2x + 3$ , puede ser visto como binomio, como relación funcional para otra variable  $y$  dependiente de  $x$ , como el duplo de un número aumentado en 3 o como el término general de una sucesión aritmética, entre otros.

Los estudiantes deben aprender a elaborar definiciones sobre la base de la descomposición genética de los conceptos precedentes y a partir de la abstracción se toman aquellas partes que serán constituyentes del nuevo objeto matemático. Dicho tipo de procedimiento, disminuye la probabilidad de que los estudiantes cometan el error de utilizar una definición sin haber asimilado el concepto. Además, crea un horizonte más amplio de aplicabilidad de una determinada definición a múltiples ejercicios y problemas, debido a que durante el proceso de definir, se integran formas variadas de razonamientos, visualizaciones y generalizaciones, las cuales son más susceptibles de ser evocadas en la memoria.

Al finalizar la etapa, el estudiante debe estar en condiciones de formular y resolver problemas de un alto grado de complejidad de forma creativa; elaborar actividades matemáticas, a partir de la combinación de habilidades en el análisis teórico de conceptos (en tanto permite descubrir las acciones y el razonamiento

relacionado con el aprendizaje de contenidos matemáticos) y la coordinación entre distintos registros de representación semiótica (permiten múltiples formas de exteriorizar formalmente la tarea problémica). La enseñanza, aprendizaje y la aplicación de los objetos matemáticos, debe estar intencionada al trabajo con la dualidad proceso-objeto.

La evaluación en esta etapa, se manifiesta en el nivel de efectividad para la resolución y la formulación de problemas como expresión máxima del desarrollo del PMA, según los indicadores determinados, el nivel de autorregulación y control de los procesos lógicos del pensamiento durante el desarrollo de actividades matemáticas, así como el nivel de desarrollo de habilidades para la comunicación de procedimientos y las vías de solución a problemas.

## **2.5 Formas de implementación y evaluación del modelo didáctico**

Las formas de implementación del modelo didáctico, son el modo de organizar la interacción de los diferentes elementos y procesos que inciden en su instrumentación práctica. Las mismas están conformadas por acciones dirigidas a crear las condiciones materiales, organizativas y de preparación de los profesores, necesarias para responder a las exigencias del modelo.

En este sentido, se propone la instrumentación del modelo a través de una estrategia metodológica o didáctica, que contenga acciones para la preparación de los profesores, la metodología a utilizar en cada etapa respecto a las características esenciales del desarrollo del PMA, así como la organización de momentos de intercambio y análisis sistemáticos de los resultados parciales de la estrategia, que permiten la adecuación de sus acciones.

Las formas de evaluación del modelo, son aquellas vías que permiten obtener la información necesaria para evaluar las transformaciones provocadas con la aplicación práctica del modelo, en correspondencia con sus dimensiones e indicadores, tanto en el orden del accionar docente y metodológico de los profesores, como de la preparación académica que alcanzan los estudiantes.

## Capítulo II

Se consideran como formas de evaluación del modelo propuesto, las siguientes:

1. Las acciones previstas en el sistema de evaluación de las asignaturas de la disciplina Análisis Matemático, en correspondencia con las características esenciales del desarrollo del PMA.
2. La evaluación integral del desarrollo del PMA al finalizar la asignatura.
3. La realización de visitas a clases y las actividades metodológicas de las asignaturas y disciplinas.
4. El desarrollo de talleres para la socialización de los resultados de los estudiantes en cada etapa.
5. La aplicación de métodos (entrevistas, encuestas y pruebas pedagógicas, la observación a clases), para evaluar los objetivos previstos.

Para evaluar los niveles de transformación logrados con la aplicación del modelo a partir de las formas anteriores, además del nivel de desarrollo alcanzado por los estudiantes, se tienen en cuenta los siguientes aspectos:

1. Los objetivos de las actividades determinan la complejidad, profundidad y aplicación del contenido, para el desarrollo de las características esenciales del desarrollo del PMA.
2. El contenido de las actividades se corresponde con las necesidades del diagnóstico, los objetivos de la etapa del modelo que se desarrolla y la aplicación del *método genético-constructivo*.
3. Los métodos y las formas de organización de las actividades, permiten la participación protagónica de los estudiantes en la apropiación de los contenidos y en la búsqueda de la información.
4. El sistema de evaluación permite medir el nivel de desarrollo alcanzado, para las características esenciales del desarrollo del PMA.

### Conclusiones parciales

1. El proceso de modelación se desarrolló sobre la base de la sistematización de los referentes teóricos, las potencialidades y las limitaciones presentadas en el Capítulo I. A partir de la abstracción, en término de regularidades y relaciones esenciales del desarrollo del PMA, se obtiene un modelo didáctico que constituye una representación simplificada del objeto de investigación; dicho modelo fue presentado y evaluado en talleres de tesis y mediante consulta a expertos.
2. Los fundamentos del modelo didáctico se construyeron sobre la base de los principios de la Psicología Dialéctico-Materialista, del Enfoque Histórico Cultural de Vigotsky, de la teoría de la descomposición genética de conceptos, de la teoría de las representaciones semióticas, de la teoría de los mapas conceptuales y se asumieron principios del PEA desarrollador.
3. Las características esenciales del PMA se sistematizaron en las categorías *representación en esquemas*, *visualización lógica* y *creatividad matemática* para viabilizar su expresión didáctica desde las clases de AM; además, se creó el *método genético-constructivo* para potenciar el desarrollo del PMA desde la apropiación activa y creadora de los conocimientos de la disciplina AM, en el tránsito por dichas categorías. Para trabajar el desarrollo del PMA durante toda la disciplina AM, se determinaron las etapas de familiarización y sistematización.

### **CAPÍTULO III**

**ESTRATEGIA METODOLÓGICA PARA LA IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO.**

**RESULTADOS DEL PROCESO DE VALIDACIÓN**

### **CAPÍTULO III: ESTRATEGIA METODOLÓGICA PARA LA IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO. RESULTADOS DEL PROCESO DE VALIDACIÓN**

En este capítulo, se presenta una estrategia metodológica para la implementación del modelo didáctico y en consecuencia potenciar el desarrollo del PMA desde la disciplina AM, en la Universidad de Pinar del Río. También se presentan la validación parcial del modelo y la estrategia metodológica mediante su introducción en la asignatura AM I.

#### **3.1 Estrategia que instrumenta el modelo didáctico para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático avanzado**

La estrategia metodológica constituye la vía determinada en la presente investigación para la instrumentación del modelo didáctico, para potenciar el desarrollo del PMA desde la disciplina AM en la formación inicial del profesional de Educación Matemática.

En esta investigación se asume la definición de *estrategia metodológica* dada por De Armas y Valle (2011):

[...] la proyección de un sistema de acciones a corto, mediano y largo plazo, que permite la transformación de la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje tomando como base los métodos y procedimientos para el logro de los objetivos determinados, en un tiempo concreto. (p. 39)

La estrategia metodológica para potenciar el desarrollo del PMA, se concibe como el conjunto de acciones secuenciales e interrelacionadas que ejecutan coordinadamente el profesor y los estudiantes, orientadas a lograr el avance progresivo de estos últimos en la ejecución de acciones mentales para *la representación en esquemas, la visualización lógica y la creatividad matemática*. La estrategia se estructuró en las siguientes etapas: *preparación metodológica; intervención práctica y evaluación*.

*Preparación metodológica*: en esta etapa se planifica y se desarrolla un ciclo de trabajo, con el objetivo de preparar a los profesores desde el punto de vista científico y metodológico para la concreción del modelo didáctico y el empleo del método genético-constructivo en las clases de Análisis Matemático.

*Intervención práctica*: en este período se trabajan desde las clases de AM y de forma sistemática, las categorías: *representación en esquemas, visualización lógica y creatividad matemática*, mediante la utilización

del *método genético-constructivo*, y otros. Dichas categorías y métodos se desarrollan según los objetivos y lineamientos establecidos para las dos etapas del modelo (la *etapa de familiarización* y la de *sistematización*).

*La evaluación:* en esta etapa se procesan integralmente los resultados obtenidos al realizar un conjunto de acciones, durante el período de implementación de la estrategia, que permiten medir el nivel de cumplimiento de los objetivos previstos y el nivel de desarrollo del PMA alcanzado por los estudiantes, según los indicadores determinados para cada una de sus características.

La estrategia en la consecución de su objetivo no se proyecta de forma rígida sino flexible, en correspondencia con las posibles y constantes adecuaciones que puede soportar su sistema de acciones y por la necesaria correlación que se establece entre los componentes de la estrategia y los componentes del modelo. El control y evaluación del cumplimiento de los objetivos está presente durante todo el proceso de implementación de la estrategia.

*Objetivo general de la estrategia metodológica:* Potenciar el desarrollo del PMA de los estudiantes, a partir de la concreción del modelo didáctico en el PEA de la disciplina AM, que permita mejoras en el rendimiento académico de los estudiantes.

#### **3.1.1 Etapa I: Preparación metodológica**

El *objetivo principal* de esta etapa es la *preparación metodológica del claustro de profesores de la disciplina AM, según las relaciones descritas en el modelo didáctico sobre la implementación del método genético-constructivo, la descomposición genética de conceptos, la coordinación de registros semióticos y la utilización de mapas conceptuales, para contribuir de forma adecuada al desarrollo del PMA.*

Esta etapa de la estrategia comienza en el período de preparación científico-metodológica de los profesores, previo al semestre en que se comienza la impartición de la disciplina Análisis Matemático, donde se implementará el modelo didáctico. La presente etapa trasciende al inicio del curso escolar, ya que contiene acciones para un diagnóstico inicial y clases metodológicas que serán desarrolladas durante el curso.



## Acciones

- 1.1 *Análisis de los documentos rectores.* En esta acción se realiza un análisis sistemático de los objetivos del modelo del profesional, de la disciplina y de las asignaturas, referidos al desarrollo del PMA. Se deben determinar las orientaciones metodológicas generales y particulares sobre este tema, para buscar puntos comunes y divergentes con la investigación realizada (Anexo 15.1).
- 1.2 *Desarrollo de la reunión científico-metodológica con el tema: El desarrollo del PMA. Representaciones conceptuales.* Teniendo en cuenta los resultados del análisis de los documentos rectores, se realiza una reunión metodológica para planificar un ciclo de trabajo metodológico, con el objetivo de incrementar la preparación de los profesores en el tema del desarrollo del PMA y en la implementación de las acciones durante la intervención práctica (Anexo 15.2).
- 1.3 *Desarrollo del taller científico-metodológico: El desarrollo del PMA. Consideraciones teóricas y prácticas.* Esta acción se realiza con el objetivo de preparar a los profesores, desde la teoría y la práctica, en el proceso de desarrollo del PMA (Anexo 16.1).
- 1.4 *Desarrollo del taller científico-metodológico: El desarrollo del PMA. Los núcleos conceptuales. El método genético-constructivo para las clases de Análisis Matemático.* El objetivo de esta acción es profundizar desde la teoría y la práctica, en las acciones para la concreción del modelo didáctico para potenciar el desarrollo del PMA (Anexo 16.2).
- 1.5 *Desarrollo de la clase metodológica instructiva: El trabajo metodológico con los núcleos conceptuales y la coordinación de registros semióticos en las clases de Análisis Matemático* (Anexo 17.1). El objetivo metodológico de esta actividad es preparar a los profesores desde el punto de vista teórico y metodológico, en el trabajo con los núcleos conceptuales y la coordinación de registros semióticos para contribuir a potenciar el desarrollo del PMA.
- 1.6 *Realización el diagnóstico inicial.* El diagnóstico inicial se debe planificar en cada asignatura de la disciplina AM, atendiendo a los siguientes objetivos y procedimientos.

### Capítulo III

1. Diagnosticar el nivel de aprendizaje que presentan los estudiantes, sobre los conocimientos y habilidades necesarios para asimilar el sistema de contenidos de la asignatura.
2. Diagnosticar el nivel de desarrollo de las características esenciales del PMA en los estudiantes.

1.6.1 *Establecimiento de un orden lógico de jerarquización entre conceptos.* Esta acción está encaminada a realizar un análisis del sistema de contenidos, para elaborar posibles mapas conceptuales de la asignatura. Esta actividad es de gran importancia, pues permitirá al docente hacer un análisis teórico de los conceptos, en función de las construcciones mentales que deben desarrollar los estudiantes para la comprensión de los contenidos.

1.6.2 *Selección de los contenidos a evaluar y las formas de evaluación.* Se realiza a partir del estudio del sistema de conocimientos, habilidades y métodos del proceso de enseñanza-aprendizaje de las asignaturas de la disciplina AM, así como la influencia de las características esenciales del PMA en la apropiación de cada contenido. En este sentido, es de suma importancia diagnosticar los aspectos siguientes:

1. El conocimiento que presentan los estudiantes sobre las propiedades de los números reales y las definiciones sobre las operaciones con dichos números. Esta evaluación debe ser generalizadora, no en casos particulares, sino generales y utilizar parámetros.
2. Las propiedades de igualdades y desigualdades siempre en ambos sentidos; o sea, la aplicación en el sentido  $MI \Rightarrow MD$  y  $MD \Rightarrow MI$ . Se busca medir el nivel de generalización sobre la noción de identidad.
3. Definición e interpretación geométrica del valor absoluto de un número.
4. Significado de un mismo concepto en distintas representaciones semióticas.
5. Dado un concepto  $P$ , determinar los conceptos subordinados  $P_i$ ,  $i = 1, 2, 3 \dots$  e identificar las características añadidas al concepto  $P$ , para obtener  $P_i$ .

### *Capítulo III*

6. La formalización del conocimiento matemático en la escritura de las ideas, argumentaciones y respuestas.
7. La determinación del valor de verdad de proposiciones matemáticas compuestas (conjunción, disyunción, implicación y equivalencias) y proposiciones contrarrecíprocas.
8. El conocimiento elemental que presentan los estudiantes sobre métodos de demostración matemática.

Para el diagnóstico se propone realizar una prueba pedagógica inicial, que permita conocer el estado real de los conocimientos que presentan los estudiantes y el nivel de desarrollo de las características esenciales del PMA. Es importante destacar que en este diagnóstico, la atención está dirigida hacia dos direcciones:

1. Identificar lo que el estudiante sabe, o sea, sus conocimientos precedentes necesarios para la apropiación de los contenidos de la asignatura y verificar si el estudiante es capaz utilizar los conocimientos que posee, de forma lógica y coherente durante el desarrollo de tareas matemáticas.
2. Identificar si los estudiantes presentan dificultades similares a las diagnosticadas en el estudio inicial del objeto de investigación.

Los resultados de un buen aprendizaje constituyen indicadores para emitir un criterio sobre el desarrollo del PMA, pero durante todo el proceso de diagnóstico, la atención debe concentrarse en evaluar las características esenciales dicho pensamiento.

A partir del análisis de los resultados del diagnóstico, se deben obtener:

1. Fortalezas y debilidades en las indicaciones metodológicas del programa de la disciplina y asignaturas para potenciar el desarrollo del PMA.
2. Organización sistémica de los contenidos de la asignatura y posibles mapas conceptuales de la jerarquización de conceptos.
3. El nivel de preparación metodológica de los docentes para potenciar el desarrollo del PMA.

4. El nivel de aprendizaje que presentan los estudiantes, sobre los conocimientos y habilidades necesarios para asimilar el sistema de contenidos del Análisis Matemático y en consecuencia, elevar el desarrollo de su PMA.

5. El nivel de desarrollo de las características esenciales del PMA en los estudiantes.

**1.7** *Desarrollo de la clase metodológica demostrativa: El trabajo metodológico con los núcleos conceptuales y la coordinación de registros semióticos en las clases de Análisis Matemático (Anexo 17.2).* El objetivo metodológico de la actividad, es explicar la implementación práctica del método genético-constructivo a partir del trabajo con los núcleos conceptuales y la coordinación de registros semióticos desde las clases de Análisis Matemático.

**1.8** *Desarrollo de la clase abierta: Potencialidades de la descomposición genética de conceptos para la significatividad de los contenidos y el desarrollo del PMA desde las clases de AM (Anexo 17.3).* El objetivo metodológico de la actividad, es demostrar en la práctica la implementación del método genético-constructivo para la enseñanza aprendizaje de los contenidos del Análisis Matemático, a partir de elementos relacionados con descomposición genética de conceptos.

### **3.1.2 Etapa II: Intervención práctica**

El objetivo es instrumentar desde las clases de la disciplina AM un conjunto de acciones centradas en tratamiento metodológico de las categorías: *representación en esquemas*, *visualización lógica* y la *creatividad matemática*, según los lineamientos y las orientaciones metodológicas descritas en las dos etapas del modelo didáctico.

A continuación se describe la estructura metodológica de las categorías anteriores, en ellas se proponen acciones que deben realizar tanto el profesor como los estudiantes, las acciones se delimitan en orientaciones metodológicas y además se precisa el desempeño de dichos actores.

#### *Representación en esquemas*

El trabajo metodológico en esta categoría tiene como objetivo contribuir al desarrollo del PMA de los estudiantes mediante la utilización de esquemas y modelos gráficos, que permitan visualizar relaciones

conceptuales y organizar la información en esquemas para potenciar el nivel de abstracción, la apropiación significativa de conocimientos y el control y dirección racional de la actividad matemática.

### Acciones

- 1.1 Utilización de mapas conceptuales, para relacionar conocimientos necesarios en el control racional de la actividad matemática.
- 1.2 Coordinación, de forma consciente y sistemática, al menos dos registros de representación semiótica (necesariamente, uno de estos será gráfico).
- 1.3 Utilización de esquemas gráficos de apoyo a la dirección racional de la actividad matemática.
- 1.4 Derivación de procedimientos a partir del análisis de conceptos, definiciones y teoremas.
- 1.5 Búsqueda de posibles vías de solución a partir del razonamiento sobre esquemas gráficos.

### *Orientaciones metodológicas para las acciones anteriores*

Los mapas conceptuales son un recurso indispensable que tanto el profesor como los estudiantes deben utilizar para visualizar cualidades esenciales de un sistema de conocimientos, para la apropiación de nuevos conocimientos, para la producción nuevas ideas o para orientar la actividad racional durante la aplicación de saberes. Estos son fundamentales en la fase inicial y final del método genético-constructivo, pues inicialmente se utilizan para motivar a los estudiantes, reactivar conocimientos y visualizar relaciones matemáticas, al final, sirven como medio para visualizar la organización de conocimientos producidos durante el desarrollo de las clases.

Por ejemplo, mediante el esquema de la figura 3.1, los estudiantes pueden visualizar las relaciones de convergencia para sucesiones numéricas, lo cual orienta sus razonamientos.

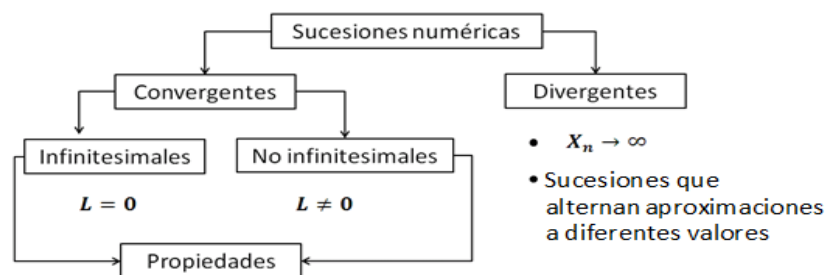


Figura 3.1

Además, si el profesor quiere introducir y utilizar el concepto de convergencia en las sucesiones numéricas se puede, en primer lugar, definir sucesión infinitesimal; después, se debe guiar a los estudiantes a que estos descompongan, mediante transformaciones algebraicas, el término general de la sucesión como la suma de un número más una sucesión infinitesimal y por último, generalizar el concepto de convergencia. Lo anterior se puede ilustrar en el esquema de la Figura 3.2.

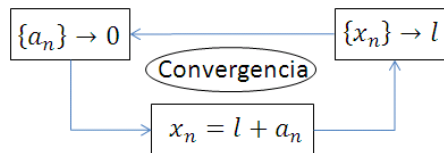


Figura 3.2

En esta relación, es posible apoyar el razonamiento de los estudiantes, si el profesor utiliza un registro semiótico gráfico para ilustrar el significado geométrico; este puede realizarse de la siguiente manera: el profesor propone la sucesión  $\left\{\frac{2n+1}{n}\right\}$ , orienta a los estudiantes separar la parte entera de la fracción algebraica  $\left\{2 + \frac{1}{n}\right\}$ , luego pide a los estudiantes calcular y representar gráficamente algunos puntos y hacer un análisis geométrico de su comportamiento cuando  $n \rightarrow \infty$  (Figura 3.3).

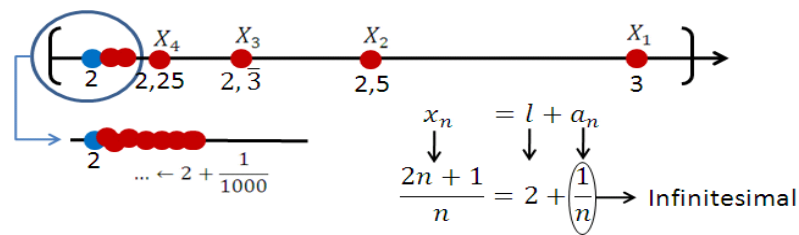


Figura 3.3

Sobre la importancia de la utilización de esquemas gráficos de apoyo a la racionalización del trabajo mental y la búsqueda de vías de solución, también se puede apreciar en el ejemplo siguiente: sea la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1; \infty)$  donde  $f(x) = x^2$ , para  $\{x \in \mathbb{R}: x \leq 0\}$  y  $f(x) = 2x - 1$ , para  $\{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$ . Se desea los estudiantes demuestren, por definición, que no existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . El profesor indica a los estudiantes a representar gráficamente dicha función (Figura 3.4), luego debe preguntar a los

estudiantes: de las definiciones estudiadas (por sucesiones, lenguaje  $\varepsilon - \delta$  o por vecindades) ¿cuál será la más práctica? El profesor propicia la reflexión y el debate entre los estudiantes sobre las potencialidades y limitaciones prácticas de las definiciones anteriores. Estos pueden llegar a la conclusión de que la demostración, aplicando la definición por sucesiones, es bastante adecuada para la actividad planteada, como se muestra a continuación.

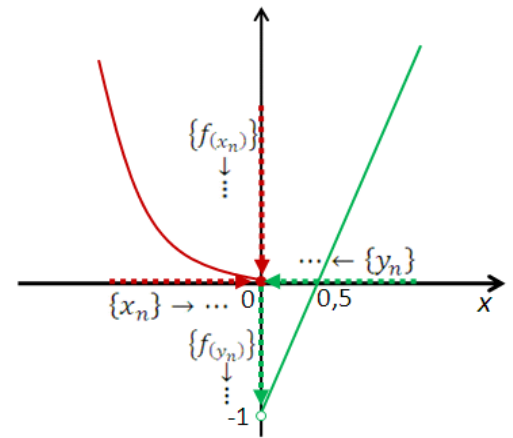


Figura 3.4

Como  $x = 0$ , es un punto de acumulación del dominio de  $f$ , se puede escoger una sucesión  $\{x_n\}$  tal que  $\{x_n\} \rightarrow 0, x_n \neq 0$  y  $x_n < 0$  y otra sucesión  $\{y_n\}$  tal que  $\{y_n\} \rightarrow 0, y_n \neq 0$  y  $y_n > 0$ . Luego se puede comprobar que  $\lim f(x_n) = 0$  es distinto de  $\lim f(y_n) = -1$ . Por tanto, queda demostrado que no existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

En el ejemplo anterior, el estudiante puede visualizar gráficamente el comportamiento de las sucesiones de imágenes de la función (Figura 3.4), en la medida que los valores del dominio se aproximan a 0, por la derecha y por la izquierda. En este sentido, el gráfico es importante, porque potencia la elección correcta de sucesiones y aunque estas sean arbitrarias, son necesarias las exigencias  $x_n < 0$  y  $y_n > 0$ , las cuales permiten la aproximación a 0 por ambos lados.

Sobre la derivación de procedimientos a partir del análisis de conceptos y definiciones, ahora se presenta cómo el profesor puede guiar a los estudiantes a que estos determinen un procedimiento de demostración a partir del análisis de la definición de sucesión convergente. Según Valdés y Sánchez (2017), "[...] la sucesión  $\{x_n\}$  es convergente, si existe un número real  $l$ , tal que la sucesión  $\{x_n - l\}$  es infinitesimal. El número  $l$ , se denomina límite de la sucesión  $\{x_n\}$  y se denota  $\lim x_n = l$  o  $\{x_n\} \rightarrow l$ " (p.10). En un lenguaje más formalizado, quedaría  $(\lim x_n = l) \Leftrightarrow [(\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon : n \geq N_\varepsilon) \Leftrightarrow (|x_n - l| < \varepsilon)]$ .

Después de que los estudiantes, guiados por el profesor, analicen y debatan los elementos esenciales de dicha definición pueden llegar al siguiente procedimiento a) fijar un  $\varepsilon > 0$  arbitrario, tan pequeño como se

quiera; b) plantear la desigualdad  $|x_n - l| < \epsilon$ , c) hallar el valor absoluto de la diferencia, teniendo presente la definición de valor absoluto; d) expresar  $n$  en términos de  $\epsilon$  para obtener el  $N_\epsilon$ ; e) indicar una expresión para el  $N_\epsilon$ , en dependencia de  $\epsilon$ ; f) escoger  $n \geq [N_\epsilon] + 1$ , g) concluir la demostración.

Cada uno de los pasos anteriores tiene un significado geométrico y para ello es necesario que el profesor haga una exposición coordinada con el registro semiótico gráfico. Además los estudiantes deben fijar un  $\epsilon > 0$  muy pequeño y comprobar para algunos valores enteros  $n \geq [N_\epsilon] + 1$  la desigualdad  $|x_n - l| < \epsilon$  se cumple y comprobar que no se cumple para los  $n \leq [N_\epsilon]$ .

Los esquemas gráficos resultan imprescindibles para buscar soluciones por diferentes vías y contribuyen a la racionalización del trabajo mental de los estudiantes en la producción de nuevos saberes. Por ejemplo, en una situación dónde el profesor se proponga a los estudiantes algunas representaciones gráficas de funciones, y les plante como interrogante, ¿qué significa que una función sea continua?

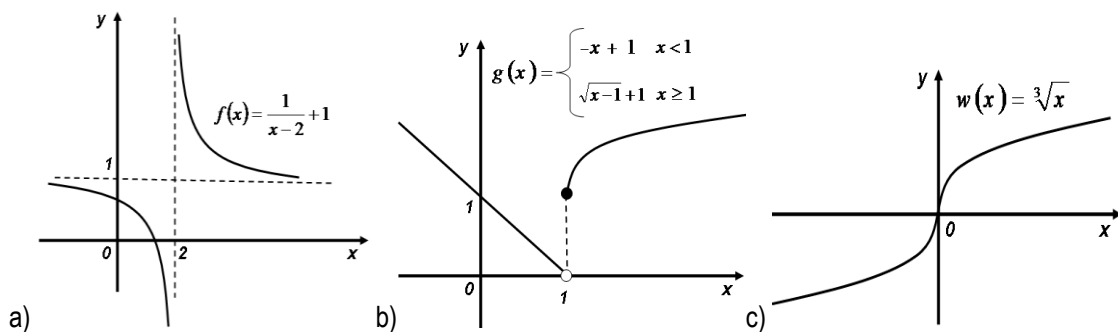


Figura 3.5

Para los estudiantes que aún no conocen el concepto ni la definición de función continua en un punto, la palabra “continua”, les es sugerente. Nótese la importancia del trabajo con los diferentes tipos de representaciones semióticas. En este caso, el registro algebraico y el geométrico. ¿Cuál de los dos registros será idóneo para introducir el concepto? Lo más probable es que esté de acuerdo con el geométrico.

Cuando los estudiantes se enfrentan por primera vez a un concepto y este no es conocido, ellos intentan categorizarlo por analogía dentro de alguna clase conceptual ya conocida; en el ejemplo anterior, dentro de las “cosas que sean continuas”, le será muy fácil a los estudiantes optar por la función del inciso c) y



dirán por intuición “se puede trazar sin levantar el lápiz”. Ahora bien ¿Será determinante la monotonía o la imagen? es evidente que no, entonces hay atributos que no son esenciales.

En el caso anterior los estudiantes tienen un concepto geométrico de función continua y el profesor podrá guiarlo a construir una definición. Sin embargo nótese algo interesante, para que la función sea continua en un intervalo, lo debe ser en cada punto de este y por tanto, los estudiantes primero deben conocer cuándo una función es continua en un punto, que es otro concepto. Por razonamiento lógico el concepto “función continua”, generaliza y depende del concepto “función continua en un punto”. Los estudiantes observan los gráficos y se dan cuenta de que el salto de gráfico en a) y b) solo ocurre en un punto y en el resto, es continua.

Por tanto, primero es necesario que los estudiantes elaboren el concepto de función continua en un punto  $x_0$  a partir de la visualización de propiedades geométricas del gráfico de la función. El punto debe estar en el dominio de la función, para que exista un punto del plano. Ahora ¿será suficiente que el punto  $(x_0; y_0)$  pertenezca al gráfico de la función?; se puede observar en el inciso b), que no es suficiente porque los gráficos deben estar “empatados” en  $x_0$ .

El profesor aún no debe definir el concepto formalmente, solo debe orientar el razonamiento de los estudiantes y trabajar sobre el registro de representación semiótico geométrico para formar, a través de la visualización, el concepto de función continua en un punto, que posteriormente se definirá. Para llegar a esto, se necesita describir qué pasa en cada punto de un intervalo dado. Para que la función sea continua, debe cumplir las exigencias mencionadas en cada punto del intervalo, lo cual sería humanamente imposible de comprobar punto a punto. A los estudiantes se les pudiera decir que la función es continua sobre un intervalo, si puede trazar su gráfico sin levantar el lápiz y se puede hacer porque cada punto está “bien pegado” uno con otro, pero no se puede verificar esto para todos los puntos porque son infinitos.

Una de las características que demanda un alto nivel de abstracción de los estudiantes para la comprensión de la continuidad en un intervalo  $I$ , es que no es posible aplicar tal definición a cada punto del intervalo por su infinitud. Esto se puede hacer solo en una cantidad finita de puntos, por lo que los

estudiantes deben analizar la ecuación funcional propuesta y sospechar en qué puntos pudieran existir conflictos de continuidad. Por ejemplo, donde no esté definida la función o en las funciones construidas por ramas, en los puntos donde hay cambio de ecuación.

Los estudiantes poseen ahora, una idea significativa de lo que es una función continua, pero más importante es que tiene una imagen del concepto, un patrón de decisión conductual. Tiene una aproximación a las características esenciales que influyen para categorizar un objeto, como representante de esta clase. Se ha creado una base visual a través de representaciones geométricas, para introducir una definición puramente algebraica.

La necesidad de esta definición, está dada por el hecho de que no siempre se tiene el gráfico de una determinada función y sí su ecuación algebraica. Por tanto, el profesor debe precisar cómo proceder algebraicamente para analizar la continuidad de una función en un intervalo dado  $I$ .

Una vía muy eficaz para que los estudiantes elaboren la definición a partir de la formación del concepto es que, de forma conjunta con el profesor, estos analicen los siguientes aspectos. En primer lugar, el punto donde se analice la continuidad debe pertenecer al dominio de la función, esto garantiza que exista un punto para el gráfico de la función. La otra característica esencial, es que dicho punto del gráfico debe tener puntos vecinos “bien pegados”, tanto por la derecha como por la izquierda y de ahí, la necesidad de que exista el límite de la función en el punto analizado y sea igual a la función evaluada en este, por lo que se puede definir de la siguiente manera.

$$\left( \begin{array}{l} \text{Sea } f: I \rightarrow \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R} \\ f \text{ es continua en } I \end{array} \right) \iff \left( \forall x_0 \in I \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \right)$$

Figura 3.6

La función que no sea continua en al menos un  $x_0 \in I$  se plantea que es discontinua en dicho punto y por lo tanto, no es continua en el intervalo analizado. Que no sea continua en  $x_0$ , significa que hubo algún elemento de la definición que no se cumplió y pudiera ser que:

### *Capítulo III*

1. El punto  $x_0$  no pertenece al dominio, pero existe el límite en el punto.
2. El límite en  $x_0$  no existe (al menos uno de los límites laterales no existe).
3. Existen los límites laterales, pero no son iguales en el punto analizado.

De los aspectos anteriores, si solo ocurre el primer punto la discontinuidad se clasifica como evitable; si solo ocurre el tercer punto, como no evitable de primera especie o tipo salto (Figura 3.5, b), y no evitable de segunda especie si solo ocurre el punto 2 (Figura 3.5, a).

#### *Visualización lógica*

Esta categoría tiene como objetivo contribuir al desarrollo del PMA de los estudiantes desde el trabajo metodológico con la estructura lógica que subyace en las proposiciones matemáticas, sobre la base de combinaciones biunívocas entre representaciones gráficas y la formalización del conocimiento, para que los estudiantes aprendan a emitir juicios adecuados durante el desarrollo de actividades matemáticas.

#### **Acciones**

- 2.1** Identificación de la estructura lógica de las proposiciones matemáticas (condición necesaria, condición necesaria y condición necesaria y suficiente).
- 2.2** Vinculación de la estructura lógica de proposiciones a esquemas gráficos, para el proceso de formalización.
- 2.3** Desarrollo de mecanismos de orientación semiótica y metacognitiva para la dirección racional de la actividad matemática.
- 2.4** Visualización de relaciones lógicas entre proposiciones y razonamientos, mediante esquemas gráficos.

#### *Orientaciones metodológicas para las acciones anteriores*

Es un objetivo fundamental del PEA de la disciplina Análisis Matemático, que los estudiantes realicen demostraciones de teoremas, corolarios y lemas. El mecanismo básico de demostración se elige teniendo en cuenta su estructura lógica (implicación, equivalencia, conjunción, disyunción, negación). El profesor debe

### Capítulo III

enseñar a los estudiantes a reconocer que: cuando el teorema es directo, su estructura es  $(P \Rightarrow Q)$ ; contrario  $(noP \Rightarrow noQ)$ ; recíproco  $(Q \Rightarrow P)$ ; contrario del recíproco o contrarrecíproco  $(noQ \Rightarrow noP)$ .

Frecuentemente en la disciplina Análisis Matemático, el teorema  $P \Rightarrow Q$ , se enuncia como que  $P$  es *condición suficiente* para que se cumpla  $Q$  o también que  $Q$ , es *condición necesaria* para que se cumpla  $P$ .

Para que los estudiantes visualicen las relaciones lógicas anteriores, es importante que el profesor utilice esquemas y recursos de analogía para ilustrar la esencia del porqué  $P$  es una *condición suficiente* para  $Q$  y  $Q$  es una *condición necesaria* para  $P$ , para ello se puede utilizar un esquema como el de la Figura 3.7 (la ilustración gráfica no se refiere a relaciones entre conjuntos).

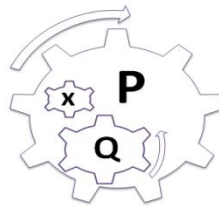


Figura 3.7

En la figura  $P$ , es condición suficiente para  $Q$ , “siempre que se mueva  $P$ , se mueve  $Q$ ”. Sin embargo,  $Q$  es condición necesaria para  $P$  pero no suficiente, porque “puede que  $Q$  se esté moviendo y  $P$  no lo esté haciendo”. Se pudiera decir que  $P$ , tiene “mejores cualidades”, tiene “más rango” o es “más grande que  $Q$ ”. Por ejemplo, sea  $P$ : *sucesión convergente* y  $Q$ : *sucesión acotada*, en este caso,  $P$  es suficiente para que se cumpla  $Q$ , o sea,  $P$  tiene más cualidades, pero  $Q$  es necesaria para  $P$ , no es suficiente, le faltan cualidades.

Luego los estudiantes durante las actividades de demostración de teoremas, por ejemplo del tipo  $P \Rightarrow Q$ , deben identificar cuáles son los elementos necesarios y “excedentes” de la hipótesis, esto permite que se puedan encontrar varios procedimientos de demostración. La representación de relaciones lógicas en esquemas permite visualizar e ilustrar con mejor calidad las posibles formas de razonamiento y se logra potenciar el nivel de abstracción y la significatividad del aprendizaje de los contenidos matemáticos.

Es necesario que los estudiantes aprendan a vincular la estructura lógica de proposiciones matemáticas a esquemas gráficos, para el proceso de formalización. Por ejemplo, el teorema de Bolzano-Weierstrass

para conjuntos plantea: “si  $E \subset \mathbb{R}$  tiene infinitos elementos y es acotado, entonces, existe por lo menos un elemento de  $\mathbb{R}$ , que es punto de acumulación para  $E$ ” (Valdés y Sánchez, 2017, p.48).

En este caso el profesor debe pedir a los estudiantes que separen las proposiciones implicadas y que identifiquen la estructura lógica del teorema, lo anterior se puede realizar de la siguiente manera: sea  $P$ :  $E \subset \mathbb{R}$  tiene infinitos elementos y es acotado, es condición suficiente para  $Q$ , donde  $Q$ : existe por lo menos un elemento de  $\mathbb{R}$  que es punto de acumulación para  $E$ , es condición necesaria para  $P$ . El profesor puede potenciar los razonamientos de los estudiantes mediante el siguiente ejemplo y esquema de la Figura 3.8 (no implica relaciones conjuntistas).

En el conjunto  $E = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ , el término  $n$ -ésimo de  $\{y_n\}$ , puede estar definido por  $y_n = n^{-1}$  para  $n = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$  y  $y_n = 2^n$  para  $n = 2k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . En este caso, el conjunto posee un punto de acumulación, pero es infinito, lo cual demuestra que el recíproco  $Q \Rightarrow P$  es falso.

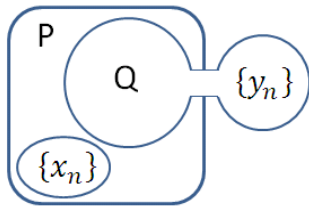


Figura 3.8

$Q$  es condición necesaria para  $P$ , porque por ejemplo, sea el universo de números racionales  $\mathbb{Q}$  y la sucesión recurrente  $\{x_n\}$  definida por  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right)$ , esta converge a  $\sqrt{2}$ . Luego, el conjunto de números racionales  $E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  es infinito, acotado y no posee puntos de acumulación en el universo  $\mathbb{Q}$ .

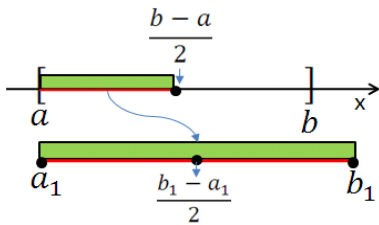


Figura 3.9

Los esquemas gráficos (figuras 3.9 y 3.10), de conjunto con la utilización de procedimientos heurísticos, constituyen un medio indispensable para que los estudiantes visualicen la lógica de los razonamientos a seguir durante el proceso de demostración, véase su aplicación y ventajas en la siguiente demostración del teorema anterior. En efecto, el conjunto  $E$  es

infinito y acotado por premisa, luego se puede suponer contenido en un intervalo  $[a; b]$  de longitud finita  $l = b - a$ . Divídase dicho intervalo a la mitad. Luego, por lo menos uno de los dos sub-intervalos contiene infinitos elementos de  $E$ .

Desígnese  $[a_1; b_1]$  tal intervalo. Vuélvase a dividir este intervalo a la mitad, luego uno de los nuevos sub-intervalos tendrá una cantidad infinita de elementos. Análogamente se obtiene otro sub-intervalo  $[a_2; b_2]$  con infinitos puntos de  $E$ . Continuando este proceso se construye un sistema de intervalos encajados, tales que:  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$  y  $[a_n; b_n] \cap E$  tiene infinitos elementos.

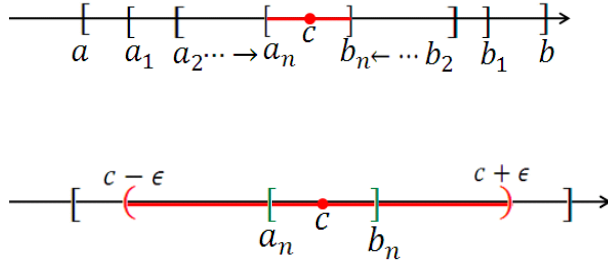


Figura 3.10

Para demostrar que el número  $c$  perteneciente a todos los intervalos es un punto de acumulación se razona sobre el siguiente esquema (Figura 3.10).

Como el sistema  $\{[a_n; b_n]\}$  es infinitesimal, entonces contiene un único elemento  $c$

perteneciente a todos los intervalos. Sea  $V_\epsilon(c)$  una vecindad de  $c$  con radio  $\epsilon > 0$  y escójase  $n$  lo suficientemente grande para que  $b_n - a_n < \frac{\epsilon}{2}$ , entonces  $[a_n; b_n] \subset V_\epsilon(c)$  y por tanto,  $V_\epsilon(c)$  contiene infinitos elementos de  $E$ . Esto prueba el teorema.

La utilización de esquemas gráficos constituye una señalización que direcciona el razonamiento lógico de los estudiantes para la dirección y control de la actividad matemática. En el caso anterior, permitió la construcción de un sistema de intervalos encajados. Dividir cada intervalo a la mitad produce la sucesión  $\{2^n\}$ ; además, se hubiese podido dividir cada intervalo en tres partes y entonces se dividiría la longitud inicial por la sucesión  $\{3^n\}$ .

La visualización de relaciones y jerarquizaciones de conceptos en esquemas, a partir de sus propiedades esenciales, es de gran importancia para la estructuración lógica del contenido y potenciar la significatividad del aprendizaje. Para justificar lo anterior, en el texto (Valdés y Sánchez, 2017, p.53), se presenta un ejemplo donde se explica lo siguiente.

Al asumir los axiomas que definen a los números racionales y aceptar el enunciado “toda sucesión monótona

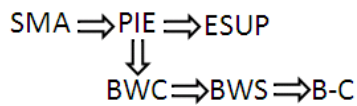


Figura 3.11

acotada es convergente” (SMA), permite demostrar el teorema denominado “principio de intervalos encajados” (PIE), con ayuda de este se prueba la existencia del supremo de un conjunto acotado (ESUP) y los teoremas para conjuntos y sucesiones de Bolzano-Weierstrass, (BWC) y (BWS) respectivamente; este último sirve de herramienta para demostrar la convergencia de toda sucesión que cumple la condición de Bolzano-Cauchy (B-C). Esta trayectoria se esquematiza en la

Figura 3.11 y ha sido tomada del texto citado.

Sobre lo anterior, Valdés y Sánchez (2017) plantean que “[...] En realidad, los 6 enunciados simbolizados como SMA, PIE, ESUP, BWC, BWS y B-C son equivalentes, es decir, todas las implicaciones en el esquema anterior pueden ser sustituidas por equivalencias” (p.53).

#### *Creatividad matemática*

El trabajo metodológico en esta categoría tiene como objetivo contribuir al desarrollo del PMA en los estudiantes, a partir de la integración de la representación en esquemas, la visualización lógica, la coordinación de registros semióticos y la utilización de mapas conceptuales, para lograr en los estudiantes un modo de actuación flexible, original e independiente durante el desarrollo de actividades matemáticas.

#### **Acciones**

- 3.1 Transferencia de razonamientos a diferentes contextos, a partir del análisis teórico de conceptos, definiciones y teoremas.
- 3.2 Fundamentación de la significatividad del contenido, a partir de la coordinación entre registros de representación semiótica.
- 3.3 Generalización de actividades matemáticas y sus razonamientos asociados, para la solución de ejercicios y problemas.
- 3.4 Formulación y resolución de ejercicios y problemas que exijan flexibilidad, originalidad e independencia en la búsqueda de varias vías de solución.

### 3.5 Fundamentación de los contenidos de la matemática escolar mediante los contenidos del AM.

#### *Orientaciones metodológicas para las acciones anteriores*

El análisis teórico de conceptos permite visualizar los razonamientos que dieron origen al mismo y transferirlos a diferentes contextos cognitivos. Por ejemplo, la condición de Bolzano-Cauchy (B-C) para la convergencia de sucesiones se puede contextualizar en la convergencia de series y en el análisis de límite de una función. Para las series numéricas, la condición plantea lo siguiente. La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es convergente si y solo si para todo  $\epsilon > 0$ , existe un número natural  $N$ , tal que, si  $n > N$ , entonces se cumple  $|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \epsilon$  para todo  $p \in \mathbb{N}$  (Sánchez, 1982, p.154).

Para que los estudiantes logren realizar un adecuado análisis del concepto y la definición, el profesor debe guiarlos a que estos identifiquen los tres conceptos fundamentales en esta condición: el concepto de sucesión de sumas parciales  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  (por lo general, al estudiante le cuesta mucho trabajo ubicar esta expresión suma dentro del registro semiótico “sucesión” de la forma  $\{r_n\}$ ), al igual que el concepto límite (expresado en la definición  $\epsilon - \delta$ ) y el concepto resto de orden  $n$  (en este caso la sucesión  $\{r_n\}$  con  $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ ). Por tanto, la apropiación de la condición de Cauchy reposa sobre la comprensión de estos conceptos ya estudiados. Los estudiantes, orientados por el profesor, deben manipular adecuadamente dichos conceptos, mediante representaciones semióticas adecuadas.

Lo primero es que los estudiantes deben identificar que para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se obtiene un resto  $\{r_n\}$ , que es una sucesión de forma que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_n + r_n$ , de donde se deduce que  $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} + \dots$ , teniendo en cuenta que los restos de cualquier orden de una serie tienen el mismo carácter que la serie; convergen o divergen. El análisis anterior implica que los estudiantes realicen acciones de conversión entre registros de representación semiótica y contribuye a potenciar su nivel de abstracción para comprender dicho contenido.

Por tanto, como consecuencia directa se puede decir que “si  $\lim r_n = 0$ , entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es convergente”, este es un resultado teórico muy importante que permitirá a los estudiantes comprender la



esencia del criterio de Cauchy. Se puede observar que el esquema final refiere el modelo cognitivo APOE, y los estudiantes de conjunto con el profesor deben construirlo desde el principio. En el ejemplo, se identificaron tres núcleos conceptuales y se debe trabajar sobre el “límite de una sucesión”.

Las funciones de tratamiento y conversión son indispensables para la coordinación de diferentes registros semióticos y para potenciar la significatividad del contenido. En el ejemplo anterior, la expresión  $|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \epsilon$  es similar a la estructura de sucesión infinitesimal, pero además, puede ser escrita como  $|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| < \epsilon$ . Este paso es una función de tratamiento que los estudiantes deben aprender a realizar dentro de un mismo registro semiótico, pero ¿cómo los estudiantes lo asocian a la condición B-C para sucesiones?, ¿cómo los estudiantes coordinan dichos razonamientos con un registro gráfico? En efecto, sea  $\sum_{n=1}^m a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{m-1} + a_m$  la suma de los primeros  $m$  términos de la serie y se toma  $m = n + p$ , luego  $m > n$ ,  $p$  unidades (Figura 3.12).

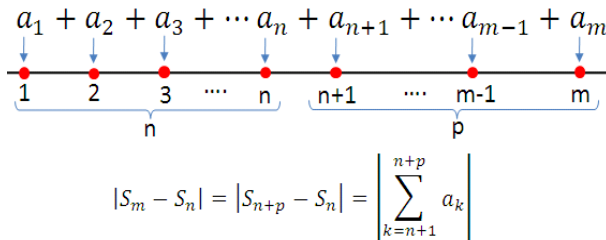


Figura 3.12

En este caso, la coordinación con el registro gráfico fortalece el nivel de abstracción para que los estudiantes logren un razonamiento generalizado, a partir de razonamientos sencillos como es la diferencia de números enteros y la suma de segmentos.

Es necesario que los estudiantes generalicen las actividades matemáticas y los razonamientos asociados a la resolución y formulación de problemas, cuando se utilizan parámetros en vez de constantes y cuando se transfieren razonamientos y resultados teóricos a otros contenidos. Por ejemplo, se puede indicar a los estudiantes resolver actividades del tipo: Calcula  $\lim(\sqrt{2n^2 + 6n} - 2n)$  y posteriormente se le presentan actividades de la forma: ¿Para qué valores de  $a$  y  $b$  converge la sucesión  $\{\sqrt{an^2 + bn + 1} - n\}$ ?, ¿cuál es el límite? Analice para qué valores de  $k \in \mathbb{R}$  la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2k)^n}{n^2}$  es convergente.

### Capítulo III

Es importante que los estudiantes formulen actividades relacionadas con la existencia o no de parámetros que hagan continua una función. Por ejemplo, pueden formular actividades como la siguiente: la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x + 1$  para  $x \leq 1$  y  $f(x) = 3 - kx^2$  para  $x > 1$ . Determinar los valores  $k \in \mathbb{R}$  que la hacen continua o discontinua.

Para que los estudiantes puedan resolver de forma creativa un ejercicio o problema tiene que ver con el grado de flexibilidad en el proceso de razonamiento, el cual permite una visión generalizada desde varias aristas, la rigurosidad en la articulación de múltiples conocimientos de la cual se derivan diferentes vías de solución, la originalidad al argumentar así como la belleza y estética en la exteriorización semiótica de las ideas.

Para que los estudiantes aprendan la formulación de problemas es necesario que el profesor los oriente en la manipulación de las características esenciales de conceptos, definiciones, propiedades y teoremas. Estos deben relacionar de forma lógica y problémica propiedades y condiciones de uno o varios contenidos, es llevar a la práctica a través de orientaciones y preguntas la articulación sistémica de conceptos, definiciones, teoremas, etc.

Por ejemplo, si se ha estudiado el concepto y la definición de sucesiones monótonas se debe enseñar a los estudiantes a construir sucesiones cuyo término general sea, por ejemplo  $x_n = \frac{-2n}{1-2n}$  y realizar algunas actividades como:

- a) Demuestre, aplicando la definición, que  $\{x_n\}$  es monótona decreciente.

Es importante destacar que para construir las sucesiones es necesario conocer con profundidad las características esenciales del concepto, para el cual dichas sucesiones constituyen un elemento del conjunto de las extensiones. Utilizando la sucesión anterior también puede indicarse:

- b) Analice la convergencia de  $\{x_n\}$ .

Observe que  $\{x_n\}$  está acotada inferiormente y en el inciso a), se demostró que era monótona decreciente. El profesor debe enseñar a los estudiantes que en la formulación de ejercicios y problemas,

las condiciones iniciales o premisas se van modificando en dependencia de lo que se desee preguntar, es decir la pregunta acota o modifica los datos iniciales. También se pueden relacionar varios contenidos y de esta forma se sistematizan, por ejemplo:

- c) Sea el conjunto  $A = \{a \in \mathbb{Q}: a = x_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Determine, si existe, el  $SupA$  y  $InfA$ .
- d) Analice si la sucesión de intervalos  $I_n = \left[\frac{n-1}{n}; x_n\right]$  es un sistema de intervalos encajados.

Fundamente.

Es importante destacar que, en dependencia de lo que se quiera preguntar, entonces se inventa el complemento; en este caso, el término  $\frac{n-1}{n}$ , para que genere los extremos izquierdos del sistema de intervalo y de forma tal que cumpla las condiciones necesarias y suficientes.

- e) Determine los intervalos  $I_1, I_2, I_3$  y compruebe que  $I_3 \subset I_2 \subset I_1$
- f) ¿Para qué valores  $k$  naturales  $I_k \subset [0,990; 1,005]$ ?
- g) Si  $A = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \dots \cap I_n \cap \dots$ . Determine el conjunto  $A$ .

En todos los casos, las preguntas se elaboran de las características esenciales de los conceptos y sus relaciones con otros conceptos. Las habilidades para formular actividades deben ser enseñadas a los estudiantes y desarrolladas durante actividades prácticas.

### **3.1.3 Etapa III: Evaluación del desarrollo del pensamiento matemático avanzado**

Los objetivos son los siguientes:

1. Evaluar el desempeño de los profesores, en la implementación práctica del modelo para el desarrollo del PMA.
2. Evaluar el nivel de desarrollo del PMA alcanzado por los estudiantes.

## **Acciones**

- 3.1** Realización de visitas de control y comprobación a clases.
- 3.2** Diseño del sistema de evaluaciones sistemáticas, parciales y finales, sobre la base de las características esenciales del desarrollo del PMA para cada etapa del modelo.
- 3.3** Evaluación de los indicadores determinados para la variable objeto de estudio, en cada subsistema de clases.
- 3.4** Retroalimentación del sistema de acciones de la estrategia.
- 3.5** Implementación de una prueba pedagógica al comienzo de la asignatura y una prueba pedagógica al finalizar la asignatura.
- 3.6** Realización de un taller metodológico donde se presenten los resultados finales de la estrategia metodológica propuesta.

### *Orientaciones metodológicas para las acciones anteriores*

Se evaluará el desarrollo del PMA según los indicadores y criterio de medida y evaluación del Anexo 6. Para el desarrollo de las clases se debe elaborar un registro de evaluación de los indicadores determinados según el modelo del Anexo 20, Tabla 20.1; durante las actividades docentes, el profesor observará el desempeño de los estudiantes y otorgará una evaluación. El profesor planificará previamente los estudiantes a evaluar y los indicadores, en dependencia de la actividad docente y de sus objetivos. Puede ser a través de la participación de los estudiantes durante la clase la evaluación de tareas o actividades prácticas, etc.

La retroalimentación y control es un proceso cíclico que estará presente durante toda la implementación práctica de la estrategia. Cada subsistema de clases constituye un espacio para evaluar la viabilidad de las acciones propuestas en cada etapa. Mensualmente, durante la preparación metodológica de la disciplina y de la asignatura se hará una evaluación del proceso de implementación de la estrategia y de ser pertinente, se realizarán las correcciones necesarias.

### 3.2 Validación del modelo. Resultados del proceso de experimentación

Se concibió un pre-experimento de la forma  $PPI \Rightarrow \text{Estímulo} \Rightarrow PPF$  (PPI: prueba pedagógica inicial, PPF: prueba pedagógica final), que tuvo como objetivo validar el modelo didáctico mediante la implementación parcial de una estrategia metodológica en la asignatura Análisis Matemático I. Este se desarrolló durante el curso diurno 2017-2018 (CD 17-18) en el primer semestre, curso por encuentro 2017-2018 (CPE 17-18) en el segundo semestre y se realizó un corte parcial en el curso diurno 2019-2018 (CD 19-20) en el primer semestre.

El pre-experimento se estructuró con las siguientes acciones:

1. Determinación de las variables [independiente (VI) y dependiente (VD)]. Se definió la VI, como *el modelo didáctico* (concretado en la asignatura Análisis Matemático I) y la VD *el desarrollo del PMA en los estudiantes*, esta es un proceso y a la vez resultado de la dimensión 2 del objeto de investigación.
2. Determinación del planteamiento hipotético: Si se implementa el modelo didáctico desde el PEA de la asignatura AM I, entonces se obtienen progresos significativos en cada uno de los indicadores del desarrollo PMA en los estudiantes.
3. Planificación de las acciones que se ejecutarán en el pre-experimento. Se precisan las formas en que se van a manipular y a controlar las variables, se elaboran los instrumentos necesarios de medición para la (VD), se determina la forma de implementar el pre-experimento: funciones, acciones, participantes, tiempo que se utilizará, entre otras y por último, se diseñan los procedimientos de recolección, organización y análisis estadístico de la información relevante.
4. Proceso de muestreo: se hizo un muestreo intencional bajo el criterio de que la muestra seleccionada estuviera integrada por los estudiantes que reciben por primera vez el AM en la carrera Licenciatura en Educación Matemática. Bajo este criterio se tomaron; en el CD 17-18, diez estudiantes y dos profesores; CPE 17-18, cuatro estudiantes y un profesor y en el CD 19-20, ocho estudiantes y un profesor. Dentro del pre-experimento estos grupos recibieron por separado la influencia de la VI, pero los resultados fueron evaluados de manera conjunta.
5. Conducción del pre-experimento en la práctica.

### Capítulo III

La evaluación de los resultados alcanzados en el desarrollo del PMA, se realizó a partir de los siguientes aspectos:

- ✓ el cálculo de un índice de evaluación para la VD en la PPI, en cada subsistema de clases de la asignatura AM I y en la PPF; para el cálculo de dicho índice se evaluarán los indicadores de la dimensión 2 (Anexo 6).
  - ✓ mediante el índice calculado anteriormente, se comparan los resultados de la PPI, las evaluaciones en cada subsistema de clases y la PPF para identificar el avance del desarrollo del PMA en los estudiantes.
  - ✓ se analizaron las frecuencias de cada indicador en la PPI y la PPF y se compararon los resultados para determinar la magnitud del avance en cada uno de los indicadores.
  - ✓ se aplica la prueba de signos de muestras relacionadas para comprobar la significatividad de cambio de los indicadores a partir de los resultados de la PPI y la PPF; así como la prueba binomial de una muestra a los resultados de los indicadores en la PPF tomando como proporción para la comparación la alcanzada con las categorías de inadecuado y poco adecuado en la PPI, esta misma prueba se aplicó la nota final de la asignatura AM I tomando como proporción de comparación el porcentaje histórico de los últimos cinco cursos de estudiantes que obtienen 3 puntos o suspenden dicha asignatura.
- a) *La preparación científico-metodológica, comenzó con un ciclo de trabajo metodológico.*
- ✓ Los resultados del análisis de documentos y de la reunión metodológica se encuentran en el (Anexo 15). Teniendo en cuenta estos resultados y los objetivos de la investigación, se planificaron los talleres de preparación científico-metodológica y el desarrollo de clases metodológicas en la semana de concentrado de preparación para el inicio del curso escolar (Anexo 15, Tabla 15.1).
  - ✓ Se desarrollan los talleres científicos-metodológicos según la planificación prevista, su diseño y resultados aparecen en el Anexo 16; además, se realizan la clase metodológica instructiva,

### Capítulo III

la clase metodológica demostrativa y la clase abierta, su diseño y resultados aparecen en el Anexo 17.

- b)** *Constatación del estado inicial de la (VD). Esto se realizó mediante la aplicación de la prueba pedagógica inicial (PPI), (Anexo 18).*

Mediante la PPI se pudo constatar que existe correspondencia entre las dificultades detectadas en años anteriores durante el estudio exploratorio inicial y el diagnóstico del estado inicial y las dificultades que presentan los estudiantes que participan en el pre-experimento. Al hacer un análisis general de los resultados alcanzados por los estudiantes se puede destacar que en la (PPI) los indicadores más afectados son los relacionados con la utilización correcta de definiciones, en el cual 19 (86,4%) de los estudiantes fueron evaluados entre inadecuado y poco adecuado; situación similar presenta el indicador referido a la identificación de un mismo concepto en formalizaciones diferentes; en la representación de un concepto en diferentes registros semióticos, 21 (95,4%) estudiantes fueron evaluados entre inadecuado y poco adecuado; en cuanto a la logicidad en la búsqueda de la demostración, 19 (86,3%) de los estudiantes fueron evaluados entre inadecuado y poco adecuado; la formalización en la representación de la demostración, 20 (90,9%) estudiantes fueron evaluados entre inadecuado y poco adecuado; el indicador de mejores resultados fue el relacionado con la conversión del lenguaje común al lenguaje técnico de la matemática, en el cual solo 8 (36,3%) estudiantes fueron evaluados entre inadecuado y poco adecuado (Anexo 23, Tabla 23.1).

Las limitaciones de los indicadores analizadas anteriormente traen como consecuencia:

- ✓ insuficiencias al identificar proposiciones y relaciones equivalentes. Estas revelan la no coordinación del significado dentro de distintos registros de representaciones semióticas.
- ✓ imposibilidad de ilustrar el razonamiento mediante el análisis de gráficos o esquemas.
- ✓ deficiencias en el proceso de generalización y deducción.

### Capítulo III

- ✓ insuficiencias para argumentar con coherencia y rigurosidad sobre aspectos elementales de la Matemática.
  - ✓ desconocimiento de las relaciones lógicas (implicación, equivalencia; proposiciones negadas, contrarias y recíprocas).
  - ✓ imposibilidad de realizar demostraciones sencillas de la Matemática.
- c) *Desarrollo, control y evaluación de la etapa de intervención práctica de la estrategia metodológica.*

La etapa de intervención práctica de la estrategia metodológica se rige por los lineamientos y orientaciones metodológicas de la primera etapa del modelo la cual está dirigida a familiarizar a los estudiantes con las formas de desarrollar las características esenciales del PMA y sus particularidades, desde el trabajo con las categorías *representación en esquemas, visualización lógica y creatividad matemática*, las cuales se potenciaron desde cada subsistema de clases con la predominante utilización del método genético-constructivo en la asignatura AM I.

El trabajo con las categorías anteriores inicia, en el primer subsistema de clases, con el tema sucesiones numéricas, con una frecuencia de seis horas clases semanales. Para ello, se establece un ciclo de formas organizativas de la actividad docente, predominantemente, de la siguiente manera: conferencia, autopreparación, consulta, clase práctica, seminario.

En la primera conferencia de cada ciclo se trabajan las acciones para la representación en esquemas. Se intencionan los modelos gráficos como medios auxiliares para la visualización de propiedades y de relaciones, durante el proceso de formación de conceptos. Los conceptos se construyen de forma intuitiva no formalizada, a partir de configuraciones que se realizan entre núcleos conceptuales, lo cual tributa a la significatividad del aprendizaje desarrollador. Con la utilización de mapas conceptuales y el trabajo intencionado a la coordinación de registros semióticos, los estudiantes lograron elaborar procedimientos de demostración, a partir del análisis de conceptos y sus definiciones formales.



### *Capítulo III*

El desarrollo de las acciones determinadas para la categoría visualización lógica, sustentaron los razonamientos que los estudiantes realizaron mediante la representación en esquemas. Dichas acciones potenciaron el nivel de abstracción y la dirección racional de la actividad matemática, manifestándose en la fluidez con la que los estudiantes argumentan sus procedimientos.

Con los conocimientos adquiridos en las conferencias y la orientación precisa del profesor, los estudiantes gestionaron y ampliaron sus conocimientos durante la autopreparación. En la conferencia predominó el método genético-constructivo, principalmente las fases activación-motivación y configuración-significatividad, lo cual propició que los estudiantes fueran protagonistas de sus aprendizajes. Las dudas que quedaron en la conferencia y las que surgieron durante la autopreparación, fueron aclaradas en el espacio de consulta, que realizó una vez por semana en sesión contraria a la docencia.

Las clases prácticas son concebidas como el espacio donde el estudiante pone en práctica los conocimientos y procedimientos adquiridos durante la conferencia y la autopreparación. En dichas clases predomina la fase de aplicación-creatividad del método genético-constructivo y constituyen un espacio de aproximación sucesiva al desarrollo de la creatividad matemática; además las clases prácticas constituyen un espacio para la evaluación, tanto del aprendizaje como del desarrollo gradual en las características esenciales del PMA en los estudiantes.

Las clases prácticas de laboratorio se concibieron una para el tema de sucesiones, una para las series numéricas y dos para el tema de funciones. Se logró integrar de forma generalizada las acciones de las categorías: representación en esquemas, visualización lógica y creatividad matemática. Los asistentes utilizados fueron el Derive y GeoGebra con predominio de este último; se trabajaron los temas de sucesiones y series, para los cuales se diseñaron actividades gráficas de aproximación de puntos sobre una recta; para el concepto de límite se trabajó la visualización del intervalo de imágenes cuando se varían intervalos del dominio en una proximidad de un punto y relacionado con las funciones continuas se visualizaron raíces de ecuaciones en un intervalo acotado.

### *Capítulo III*

Se planificaron dos seminarios, uno para el tema de las sucesiones y otro para el tema de funciones los cuales se realizaron al finalizar las unidades didácticas. Estos constituyeron un espacio para el debate y la reflexión, sobre las potencialidades de los correspondientes contenidos del Análisis Matemático a la fundamentación de la Matemática escolar. En el tema de sucesiones se abordó el método de demostración por inducción completa y la importancia del principio de continuidad para la construcción de los números reales; en el tema de funciones las potencialidades de los conceptos de límite y continuidad para fundamentar las propiedades de las funciones que se estudian en la enseñanza media.

#### **Resultados de las observaciones a clases**

La observación a clases se realizó inicialmente durante el CD 17-18, se realizaron 20 observaciones a actividades docentes (10 conferencias, 6 clases prácticas y 4 consultas), para ello se diseñó un instrumento (Anexo 19, Tabla 19.1) que permitió evaluar el nivel de influencia que tiene el método genético-constructivo en la VD. Como se puede apreciar en el Anexo 19, Tabla 19.4; en el 75% de las actividades docentes hubo una correspondencia favorable entre la adecuada utilización del método genético-constructivo y la VD.

Al inicio de la intervención práctica de la estrategia metodológica, se observó que la mayor dificultad para los profesores fue armonizar las acciones método genético-constructivo según la estructura de la clase, por existir dificultades en los estudiantes sobre conocimientos básicos, lo que debilitaba la efectividad del método. Para resolver esta situación fue necesario tener en la preparación metodológica previa a cada actividad docente, un diagnóstico de los conocimientos y habilidades de los estudiantes y atender estas desde la consultas; posteriormente se constató un aumento paulatino en la calidad de las acciones del método.

Lo anterior se evidencia en el Anexo 19, Tabla 19.2, donde se puede observar que en la primera conferencia y en la clase práctica controladas respectivamente, la VD fue evaluada de poco adecuada (PA), debido a la adaptación inicial del sistema de acciones y a los métodos de evaluación usados en el control. En la medida que avanzó la asignatura se fueron obteniendo resultados paulatinamente superiores, hasta llegar a evaluar las últimas actividades como bastante adecuadas (BA) y muy adecuadas (MA).

### Capítulo III

Además durante la etapa de intervención práctica de la estrategia metodológica en el CD 17-18, se realizó un control y evaluación de la VD en cada subsistema de clases mediante un registro de notas (Anexo 20, Tabla 20.1), el profesor evaluó en cada estudiante los diez indicadores de la dimensión 2 durante las actividades docentes y de esta forma al finalizar cada subsistema de clases. El índice de evaluación del desarrollo del PMA de los estudiantes en los ocho sub-sistemas de clase que comprendió la asignatura AM I donde pasó de alcanzar el 32% del puntaje total en la PPI al 78% en la PPF, lo que representa un aumento del 43% de los puntos (Anexo 22, gráfico 22.1).

De forma general durante la implementación de la estrategia, se pudo constatar la motivación en los profesores y estudiantes, manifestada en su carácter dinámico y activo en las actividades docentes. En dichas actividades, por lo general, los estudiantes no presentaron síntomas de agotamiento, se mostraron atentos a las explicaciones, incluso las cuestionaron, se ayudaron unos a otros, quisieron hacer más, fueron puntuales al turno de clase, estuvieron alegres, se interesaron por su actuación, realizaron sus tareas y en otras palabras, sintieron placer y deseo por aprender y estudiar los contenidos del Análisis Matemático I.

#### d) Resultados de la prueba pedagógica final (PPF)

Se procedió de forma similar a lo explicado en el *inciso b)*, se elaboró un cuestionario para la (PPF), (Anexo 21), similar al de la (PPI). En dicho cuestionario se evalúan los indicadores de la dimensión 2 con los mismos criterios de medida y evaluación del Anexo 6 y se aplicó en el CD 17-18 y el CPE 17-18. En el CD 19-20 no fue posible aplicar la PPF, pues solo se ha hecho una implementación parcial de la estrategia, en este caso los indicadores de la dimensión 2 se evaluaron en el primer sub-sistema de clases según el modelo del Anexo 20, Tabla 20.1.

En la aplicación de la (PPF) se constató que los estudiantes tienen avances significativos en cada indicador (Anexo 23, Tabla 23.1). A continuación, se presenta un análisis comparativo en cada indicador (ID).

El ID1 en solo 2 (9,1%) estudiantes fue evaluado de “poco adecuado”, lo que representa una disminución del 68,2%, la categoría mejor posicionada fue “adecuada” con un 50%; el ID2 en solo 4 (18,2%) estudiantes fue evaluado de poco adecuado, lo que representa una disminución del 49,9%, la categoría

### Capítulo III

mejor posicionada es “adecuada” con un 50%; el ID3 en solo 2 (9,1%) estudiantes fue evaluado de poco adecuado, lo que representa una disminución del 72,8% y la categoría mejor posicionada fue “bastante adecuada” con un 59,1%; el ID4 en solo 4 (18,1%) estudiantes fue evaluado entre “inadecuado” y “poco adecuado”, lo que representa una disminución del 68,2%, la categoría mejor posicionada fue “adecuada” con un 50%; el ID5 en solo un estudiante (4,5%) se evaluó de “poco adecuado”, lo que representa una disminución del 31,8%, la categoría mejor posicionada fue “bastante adecuado” con un 50%.

El ID6 en solo 6 (27,2%) estudiantes se evaluó entre “inadecuado” y “poco adecuado”, lo que representa una disminución del 59,2%, la categoría mejor posicionada fue “adecuada” con un 59,2%; el ID7 en el 100% de los estudiantes fue satisfactoria, lo que representa un aumento del 81,8%, la categoría mejor posicionada fue “bastante adecuado” con un 40,9%; el ID8 en solo 3 (13,6%) estudiantes se evaluó como “poco adecuado”, lo que representa una disminución del 81,8%, la categoría mejor posicionada fue “adecuado” con un 45,5%; el ID9 en solo 7 (31,8%) estudiantes se evaluó entre “inadecuada” y “poco adecuada”, lo que representa una disminución del 54,5%, la categoría mejor posicionada fue “adecuada” con el 36,4%; el ID10 solo en 5 (22,7%) estudiantes se evaluó entre “inadecuada” y “poco adecuada”, lo que representa una disminución del 68,2%, la categoría mejor posicionada fue “adecuado” con un 40,9%.

La aplicación de la *prueba de los signos de muestras relacionadas* permitió rechazar la siguiente hipótesis nula: *la mediana de la diferencia entre la categoría del indicador en la PPI y la PPF es igual a cero*; esto se cumplió en todos los casos y revela significatividad en los cambios (Anexo 23, Tabla 23.2). La aplicación de la *prueba binomial para una muestra* permitió rechazar la siguiente hipótesis nula: *las categorías definidas para el indicador menores o iguales que adecuado y mayores que adecuado se producen con la misma proporción en que se manifiestan en la PPI*. Esto revela una favorable probabilidad de éxito (obtener “bastante adecuado” o “muy adecuado”) siempre que se implemente el modelo didáctico en las clases de la asignatura AM I (Anexo 23, Tabla 23.3).

### Capítulo III

#### e) Resultados obtenidos en el examen final de la asignatura

En el examen final de la asignatura se muestra un avance considerable en cuanto a la calidad del rendimiento académico, 4 (28,6%) estudiantes obtuvieron 5 puntos; 8 (57,1%) estudiantes obtuvieron 4 puntos y 2 (14,3%) obtuvieron 3 puntos (Anexo 24, Tabla 24.2). La aplicación de la prueba binomial para una muestra permitió rechazar la siguiente hipótesis nula: *las categorías definidas para las notas del examen final de AM I menores o iguales que tres puntos y mayores que tres puntos se producen con la misma proporción que los resultados históricos de esta asignatura en los últimos cinco cursos* (Anexo 24, Tabla 24.3). Esto revela una favorable probabilidad de obtener éxito (estudiantes que obtienen 5 o 4 puntos) en la asignatura AM I con la implementación del modelo didáctico.

Los avances fundamentales en el desarrollo del PMA, en los estudiantes que se manifiesta en los siguientes aspectos:

- ✓ coordinación efectiva entre distintos registros de representaciones semióticas, dada por la correcta aplicación de las funciones de tratamiento y conversión. Esta se manifiesta en el hecho de que los estudiantes lograron identificar definiciones y proposiciones equivalentes sobre un mismo concepto.
- ✓ en determinadas situaciones, los estudiantes apoyan sus razonamientos en el uso correcto de representaciones gráficas.
- ✓ los estudiantes son capaces de generalizar ideas, a partir de casos particulares.
- ✓ durante el desarrollo de actividades, los estudiantes presentan control en la dirección de estas, logrando ser eficientes en la solución de ejercicios y problemas. Esto se manifiesta en el hecho de que los estudiantes tienen una visión general y control de los conceptos y procedimientos que utilizan.
- ✓ Los estudiantes logran identificar la estructura lógica de las proposiciones y teoremas.
- ✓ La mayoría de los estudiantes son capaces de identificar distintas vías para las demostraciones con el apoyo de representaciones gráficas y lo hacen con creatividad.

Los resultados anteriores permiten afirmar que la implementación del modelo didáctico que potencie las características esenciales del PMA mediante el trabajo con la representación en esquemas, la visualización lógica y la creatividad matemática, desde el PEA del AM, permite lograr progresos significativos en cada uno de los indicadores del desarrollo del PMA de los estudiantes.

### **Conclusiones parciales**

1. Para la implementación práctica del modelo didáctico se elaboró una estrategia metodológica, conformada por un sistema de acciones organizado en una primera etapa, dirigida a la preparación metodológica de los profesores; una segunda etapa, para la intervención práctica y una tercera etapa, para la evaluación del desarrollo del PMA alcanzado por los estudiantes.
2. El modelo y la estrategia se evaluaron a partir de la aplicación del método Delphi. Además, se implementó la estrategia mediante un pre-experimento desde la asignatura AM I en el CD 17-18, CPE 17-18 y se presentan resultados parciales del CD 19-20, con el objetivo de validar el modelo didáctico.
3. El análisis resultados obtenidos durante la evaluación de la VD durante los subsistemas de clases, la PPF y la nota final de la asignatura AM I, revelaron una significativa probabilidad de éxito en el desarrollo del PMA de los estudiantes mediante la implementación del modelo didáctico. Lo anterior se justifica por los resultados significativos obtenidos en el cálculo de índices de evaluación; la aplicación de la prueba de signos de muestras relacionadas y la prueba binomial para una muestra.

## CONCLUSIONES

El bajo rendimiento académico de los estudiantes en la disciplina Análisis Matemático, está relacionado con los insuficientes niveles de abstracción para la comprensión de conceptos, dificultades al hacer analogías y transferencias necesarias de las matemáticas elementales a las superiores y con la estructuración y organización de saberes para la dirección racional de la actividad matemática. Dichos aspectos están relacionados con el PMA, por lo que su desarrollo constituye el objeto de investigación.

El PMA constituye un proceso cognoscitivo y a la vez un resultado, que permite conocer la esencia de los objetos matemáticos y descubrir lo nuevo dentro de la complejidad; su desarrollo desde la Didáctica está asociado a la integración de elementos del PEA desarrollador, la teoría de la descomposición genética de conceptos, la coordinación de registros semióticos y la utilización de mapas conceptuales, entre otros.

A partir de la sistematización de los referentes teóricos se definió el desarrollo del PMA y se operacionalizó en dimensiones e indicadores para su diagnóstico inicial, este permitió revelar las principales deficiencias de los estudiantes, relacionadas con las características esenciales del PMA y las limitaciones teóricas en torno a la concepción del PEA de los contenidos de la disciplina AM.

Para el estudio y desarrollo del PMA, se elaboró un modelo didáctico en el que se conceptualizan tres categorías fundamentales: la representación en esquemas, la visualización lógica y la creatividad matemática, con el objetivo de viabilizar el tratamiento didáctico a las características esenciales del PMA; además, se creó el *método genético-constructivo* para contribuir a la apropiación activa y creadora de los conocimientos de la disciplina AM, según las etapas de familiarización y sistematización.

Para la implementación práctica del modelo didáctico se elaboró una estrategia metodológica que consta de una primera etapa, dirigida a la preparación metodológica de los profesores para contribuir al desarrollo del PMA; una segunda etapa, de intervención práctica donde se presentan acciones a realizar por el profesor y los estudiantes con sus correspondientes orientaciones metodológicas en cada una de las categorías del PMA y una tercera etapa, donde se conciben acciones para la evaluación. Con la utilización

del criterio de expertos, se logró perfeccionar tanto el modelo como la estrategia y posteriormente, obtener su evaluación satisfactoria.

La validación parcial se realizó mediante un pre-experimento que se desarrolló durante el curso diurno 2017-2018, el curso por encuentro 2017-2018 y se hizo un corte evaluativo durante el curso 2019-2020. Los resultados obtenidos muestran un adecuado desarrollo del PMA de los estudiantes y calidad en los resultados académicos, los cuales evidencian una solución parcial al problema social inicial y justifican la validez del modelo propuesto.



## RECOMENDACIONES

1. Desarrollar las acciones de las categorías representación en esquema, visualización lógica y creatividad matemática, en las asignaturas AM II, AM III, AM IV y AM V, según los lineamientos descritos para la segunda etapa del modelo didáctico.
2. Continuar el proceso de aplicación práctica del modelo didáctico a las demás asignaturas de la disciplina AM, para comprobar los resultados del mismo una vez completada su introducción en la práctica, de manera que permita evaluar el impacto de la aplicación del modelo a mediano y largo plazo.
3. Profundizar en el nivel de integración que existe entre la representación en esquema, la visualización lógica y la creatividad matemática, en cada subsistema de clases, según sus características particulares.
4. Determinar las posibles formas de evaluar el desarrollo del PMA a largo plazo, en términos de solidez, profundidad, flexibilidad y madurez que puede alcanzar este tipo de pensamiento, al trabajar sistemáticamente la representación en esquema, la visualización lógica y la creatividad matemática.
5. Evaluar el impacto que produce en los estudiantes un adecuado desarrollo del PMA para la formación del modo de actuación profesional durante el desarrollo de la práctica laboral, y posteriormente, durante su desempeño como profesionales.

## **BIBLIOGRAFÍA**

- Abbagnano, N. (1963). *Diccionario de Filosofía*. La Habana, Cuba. Instituto cubano del libro.
- Alcolea, J. (2002). La demostración matemática: problemática actual. Universidad de Valencia. Revista interdisciplinar de filosofía. vol. II (2002) ISSN: 1136-4076 pp. 15-34.
- Aldana, E. (2013). Una didáctica de la matemática para la investigación en pensamiento matemático avanzado. Revista Científico Pedagógica "Atenas", Vol.4 Nro. 23, 2013 ISSN: 1682-2749 pp. 56-69. Disponible por: [eliecerab@uniquindio.edu.co](mailto:eliecerab@uniquindio.edu.co).
- Álvarez, M., Almeida, B. y Villegas, E. (2014). *El proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática*. La Habana, Cuba. Pueblo y Educación.
- Angélica, M. (2014): Análisis según el Modelo Cognitivo APOS del Aprendizaje Construido del Concepto de la Derivada. Bolema, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 403-429, abr. ISSN1980-4415 pág. 411 Disponible en: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a20>.
- Artigue, M. (2003). ¿Que se puede aprender de la investigación educativa en el nivel Universitario? Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2 (2003) pp. 117-131.
- Asunción, M. (2012). Apuntes teóricos sobre el pensamiento matemático y multiplicativo en los primeros niveles, ISSN: 2254-8351. Universidad de Almería, pág. 2. Disponible por: [mabosch@ual.es](mailto:mabosch@ual.es).
- Azcárate, C. y Camacho. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2 135-146.
- Ballester, S. et al (2007). *Metodología de la enseñanza de la Matemática*. Tomo I. La Habana, Cuba. Pueblo y Educación.
- Ballester, S. et al (2015). *Metodología de la enseñanza de la Matemática*. Tomo I. Material digital. Texto a consulta.
- Barreto, D. (2014). La refutación como procedimiento lógico del pensamiento en estudiantes universitarios, trabajo de curso, Facultad de Psicología, Universidad de La Habana.
- Batista, G. (2003). *Compendio de Pedagogía*. Compilación. La Habana, Cuba. Ed. Pueblo y Educación.
- Blanco, R. (2013). Tesis doctoral: El pensamiento lógico, ISSN: 1885-5679, Copyright Eikasía, Eikasía. Oviedo. Pág. 36. Disponible en: [www.eikasía.es](http://www.eikasía.es).
- Brousseau, G. y D'Amore, B. (2018). Los intentos de transformar análisis de carácter metacognitivo en actividad didáctica de lo empírico a lo didáctico. *Educación Matemática*, 30(3), 41-54.

## *Bibliografía*

- Campistrous, L. (1993). Lógica y procedimientos lógicos del aprendizaje. Ciudad de La Habana: República de Cuba. MINED. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas, pág. 18. Material impreso.
- Campistrous, L. y Rizo, C. (1997). Aprende a resolver problemas aritméticos. Ed. Pueblo y Educación.
- Campistrous, L. y Rizo, C. (1999). Didáctica y resolución de problemas. Ed. Academia. La Habana.
- Cantoral, R. (2006) y otros. Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. Revista Relime, Número Especial, 2006, pp. 83-102. pág. 86.
- Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Ciudad de México, México. Gedisa, S.A. (segunda edición).
- Carmona, D. y Nidia L. (2010). El razonamiento en el desarrollo del pensamiento lógico a través de una unidad didáctica basada en el enfoque de solución de problemas, proyecto de investigación para optar por el título de máster en educación. Universidad tecnológica de Pereira. Pág. 30-31.
- Castellanos, D. (2001) Hacia una concepción del aprendizaje desarrollador. Ciudad Habana: ISPEJV.
- Castro, A (2012). La enseñanza problémica en el proceso de enseñanza –aprendizaje de la matemática escolar en Colombia. Tesis doctoral, La Habana, Cuba. P. 69-70.
- Chamberlin, S. A. y Moon, S. M. (2005). Model-eliciting activities as tool to develop and identify creatively gifted mathematicians. *Journal of Secondary Gifted Education*, 17(1), 37–47.
- Colectivo de autores, (2016). Modelo del profesional de la carrera Licenciatura en Educación Matemática, Plan E. La Habana, Cuba: Ministerio de Educación.
- Colectivo de autores, (2016). Programa de la disciplina Análisis Matemático, carrera Licenciatura en Educación Matemática, Plan E. La Habana, Cuba: Ministerio de Educación.
- Cruz, M. (2002). Estrategia metacognitiva en la formulación de problemas para la enseñanza de la matemática. Tesis en opción al grado científico de doctor en ciencias pedagógicas. Instituto Superior Pedagógico “José de la Luz y Caballero”. Holguín.
- Cuesta, A. (2007). Tesis doctoral: El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica. Universidad Autónoma de Barcelona. Bellaterra. p.23.
- D’Amore B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. In: Radford L., D’Amore B. (eds.) (2006). *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Número especial del la revista Relime (Cinvestav, México DF., México). 177-196.
- D’Amore, B., y Godino, J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática*

## *Bibliografía*

- Educativa*, *RELIME*, 10 (2), 191-218. Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33500202>.
- D'Amore, B. et al. (2015). Análisis de los antecedentes históricos-filosóficos de la paradoja cognitiva de Duval *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 18 (2), p.177-212.
- De Armas, N. y Valle, A. (2011) Resultados científicos en la investigación educativa. La Habana, Cuba. Pueblo y Educación.
- Delgado, J. R. (1999). Tesis doctoral: La enseñanza de la solución de problemas matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración sistémica del contenido de estudio y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas. Base de datos AGIC-CREA.
- Distéfano, M., Aznar, M., Pochulo, M. (2019). Caracterización de procesos de significación de símbolos matemáticos en estudiantes universitarios. Artículo de investigación. *Revista de Educación Matemática*, Vol 31 (1) pp.144-175. Disponible en: [http://www.revista-educacionmatematica.org.mx/descargas/vol31/1/06\\_REM\\_31-1.pdf](http://www.revista-educacionmatematica.org.mx/descargas/vol31/1/06_REM_31-1.pdf).
- Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. En Nesher, P. y Kilpatrick, J. (Eds), *Mathematics and cognition*. Cambridge: Cambridge University Press, p.113-133.
- Dubinsky, E. (1996). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer, p. 95-123.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En *Investigaciones en Matemática Educativa II* (Editor F. Hitt). Grupo Editorial Iberoamérica. Traducción de: *Registres de représentations sémiotique et fonctionnemen cognitif de la pensée*. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Vol. 5 (1993), p. 175.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking, basic issues for learning. *Actas del PME 23*, pp. 3-26.
- Duval, R. (2004). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del conocimiento. Cali, Colombia. Universidad del Valle.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *LA GACETA DE LA RSME*, 9(1), 143 -168. Instituto Peruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación Básica – IPEBA (2013). Disponible en <http://www.ipeba.gob.pe/estandares/MapasProgresoMatematicaNumerosOperaciones.pdf>.
- Duvergel, D. (2014). La demostración como procedimiento lógico del pensamiento en estudiantes universitarios, trabajo de curso, Facultad de Psicología, Universidad de La Habana.

## *Bibliografía*

- García, L. (1977). Sistemas, modelos y teorías. Material mimeografiado, ICCP.
- García, L. y Fernández, Y. (1998). El razonamiento matemático. Tendencias iberoamericanas en la educación matemática. Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona" Facultad de Ciencias. Departamento de Matemática-Computación. Material Impreso. P. 42-45.
- Godino, J. (2013). The Mathematical Knowledge for Teaching. A View from Onto-Semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction. In: B. Ubuz, Ç. Haser & M. Mariotti (eds.). Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Antalya, Turkey. CERME. pp. 3325-3326.
- González, V. et al. (1995). Psicología para educadores. La Habana, Cuba. Pueblo y Educación. Pág. 187-188. Pág. 47.
- Herlina, E. (2015). Advanced Mathematical Thinking and the Way to Enhance IT. Journal of Education and Practice. ISSN 2222-1735 (Paper) ISSN 2222-288X (Online). Vol.6, No.5, 2015. Pág. 2. Disponible en: [www.iiste.org](http://www.iiste.org).
- Hernández, H. (1995). Nodos Cognitivos. Un recurso eficiente para el aprendizaje matemático. IX Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. La Habana, Cuba.
- Instituto Central de Ciencias Pedagógicas. (2001). La Educación en Cuba en las actuales condiciones del desarrollo económico-social. La Habana, Cuba.
- Jiménez, M. H. (2000). Propuesta para mejorar la referencia y aplicación de los saberes del Análisis Matemático en la formación de profesores. Tesis doctoral. La Habana, Cuba.
- Jiménez, M. H. (2010). *Análisis Matemático en R*. Ciudad de La Habana, Cuba. Pueblo y Educación.
- Jungk, W. (1982). *Conferencias sobre la metodología de la enseñanza de la matemática 2*. La Habana, Cuba. Editorial de libros para la educación.
- Lenin, V. I. (1986). *Obras completas*. Tomo 29. Moscú, URSS. Editorial Progreso.
- Leonard-Rodríguez, F. (2015). Una panorámica del concepto sistematización de resultados científicos. *EduSol*, 15 (53), 106-113.
- List, G. et al. (2002). *Lógica Matemática, Teoría de Conjuntos y Dominios Numéricos*. La Habana, Cuba. Pueblo y Educación, 2da edición.
- Martínez, M. (1998). La investigación etnográfica. ISPEJV. La Habana, Cuba. Material en impresión ligera.
- Mederos, O., Roldán, R., Mederos, B., y Kakes, A. (2014). *Algunas formas de generalización de conceptos en la Matemática Disciplinar y la Escolar*. Saltillo, México. Plaza y Valdés.

## *Bibliografía*

- Mengana, W. (2016). Estrategia metodológica para el desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática III en la Universidad de Ciencias Informáticas. Tesis de maestría. Facultad de Mat-Com, Universidad de la Habana. Cuba.
- Monge, J. (2013). Visualización del conocimiento como metodología didáctica en el aprendizaje y enseñanza de la matemática. Tesis de doctorado, Doctorado n270 D-Intervención Educativa. Universidad de Valencia.
- Montalvo, M. (2012). ¿Matemática problemática, o problemas con la matemática? *Educación y Ciudad*, (23), 117-132.
- Montenegro, E.I. (2004). Modelo para la estructuración y formación de habilidades lógicas a través del Análisis Matemático. Tesis doctoral, Santiago de Cuba, Cuba.
- Müller, H. (sin fecha). El trabajo heurístico y la ejercitación en la enseñanza de la Matemática en la enseñanza general politécnica y laboral. ISP Frank País. Santiago de Cuba, (Folleto).
- Newman, J. R. (1968). *El mundo de las matemáticas*. Tomo 5. Barcelona, España. Ediciones Grijalbo, S.A. (10ma edición).
- Ordaz, L. (2003). La modelación como método científico general del conocimiento y sus potencialidades en el campo de la educación. ISPEJV, material digitalizado, La Habana, Cuba.
- Organista O. (2008). Un proceso de formalización matemática: Desde las rotaciones hasta las matrices de spin de Pauli. Grupo Física y Matemática, Departamento de Física, Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia. *Lat. Am. J. Phys. Educ.* Vol. 2, No. 3, P. 323.
- Patiño, L. (2007). Aportes del enfoque histórico cultural para la enseñanza. *Educación y Educadores*, Volumen 10, Número 1, pp. 53-60.
- Pérez, L. M., Bermúdez, R., Acosta, R. M., y Barrera, L. M. (2004). La personalidad: su desarrollo y diagnóstico (provisional). La Habana, Cuba. Editorial: Pueblo y Educación.
- Petrovski, A. (1985). *Psicología General*. Ed. Progreso. Moscú. Pág. 311.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. Este artículo es Université Laurentienne, Ontario, Canadá, publicado en *Relime*, Número Especial, pp. 103- 129.
- Robaina, I. (2018). Modo de actuación creativo en la formación inicial del profesor de matemática. Tesis en opción al grado científico de doctor en ciencias pedagógicas. Universidad de Pinar del Río.
- Rubinstein, S. L. (1964). *El desarrollo de la psicología, principios y métodos*. La Habana, Cuba. Editorial nacional de Cuba.

## *Bibliografía*

- Rubinstein, S. L. (1965). *El ser y la conciencia*. La Habana, Cuba. Editora universitaria.
- Rubinstein, S. L. (1966). *El proceso del pensamiento. El pensamiento y los caminos de su investigación. Las leyes del análisis, la síntesis y la generalización*. La Habana, Cuba. Editora Universitaria
- Ruíz, A. (2002). *Metodología de la investigación*. La Habana, Cuba. Ed. Pueblo y Educación.
- Sánchez, A. y Font, V. (2017). Reflexión sobre los futuros profesores de matemáticas y fomento de la creatividad en sus alumnos. Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Disponible en: [foqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html](http://foqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html).
- Sánchez, C. (1982). *Análisis Matemático*, Tomo I. La Habana, Cuba. Ed. Pueblo y Educación.
- Santos, L. M. (1994) La resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Cuadernos de Investigación, No. 28, UNAM, México.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem-solving*. Academic Press, New York.
- Shardacov, M.N. (1978). *Desarrollo del pensamiento en el escolar*. La Habana, Cuba. Libros para la Educación.
- Silvestre, M. y Zilverstein, T. J. (2003). *Hacia una didáctica desarrolladora*. La Habana, Cuba: Ed. Pueblo y Educación.
- Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM*, 41(1-2), 13-27.
- Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 2, 151-169.
- Tall, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. Plenary lecture, Proceedings of PME 19, Recife (Brasil).
- Torres, P. (1993). La Enseñanza Problémica de la Matemática en el nivel Medio General. Tesis para la opción al grado de Doctor en Ciencias Pedagógicas. ISPEJV. La Habana. Cuba.
- Travieso, D. (2017). El desarrollo del pensamiento lógico a través del proceso enseñanza-aprendizaje, *Revista Cubana de Educación Superior*. 2017. Número 1 p. 58.
- Urrutia, I. E. (2012). Propuesta Didáctica para contribuir al desarrollo de competencias afines al perfil del profesional de Licenciatura en Ciencia de la Computación desde el Análisis Matemático. Tesis doctoral. La Habana, Cuba.
- Valdés, C. y Sánchez C. (2017). *Análisis de funciones de una variable real*. La Habana, Cuba. Editorial Universitaria: Félix Varela.
- Valle, A. (2007). Algunos modelos importantes para la investigación pedagógica. Ciudad de la Habana. ICCP (formato digital).

## *Bibliografía*

- Valle, A. (2012). *La investigación pedagógica. Otra mirada*. Ed. Pueblo y Educación, La Habana, Cuba p. 135-140.
- Vigotsky, L. S. (1987). *Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores*. La Habana, Cuba. Editorial Científico Técnica, p. 161.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in de teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.). *Avanced Mathematical Thinking*, 65-81. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.



## **ANEXOS**

Anexo 1: Listado de Anexos

### **Estudio exploratorio inicial**

Anexo 2: Análisis del rendimiento académico de los estudiantes

Anexo 3: Entrevista a profesores de Matemática

Anexo 4: Visitas a clases de Análisis Matemático

Anexo 5: Encuesta a profesores de Análisis Matemático

### **Diagnóstico del estado inicial**

Anexo 6: Dimensiones e indicadores del desarrollo del PMA. Criterio de medida y evaluación

Anexo 7: Guía para el estudio de documentos normativos en la formación inicial del profesor de Matemática

Anexo 8: Prueba pedagógica para el diagnóstico inicial. Resultados

Anexo 9: Entrevista a estudiantes en formación de la carrera Licenciatura en Educación Matemática-Física. Resultados

Anexo 10: Guía de observación científica a clases de Análisis Matemático. Resultados

Anexo 11: Encuesta a profesores de Análisis Matemático. Resultados

### **Evaluación teórica del modelo y la estrategia**

Anexo 12: Método Delphy para evaluar la pertinencia del modelo didáctico para potenciar el desarrollo del PMA y la estrategia metodológica

Anexo 13: Encuesta para la selección de expertos. Resultados

Anexo 14: Encuesta a los expertos seleccionados. Resultados

### **Implementación de la estrategia**

Anexo 15: Análisis de los documentos normativos y reunión científico-metodológica. Resultados

Anexo 16: Talleres científicos-metodológicos. Resultados

Anexo 17: Clases metodológicas (instructiva, demostrativa y abierta). Resultados

Anexo 18: Prueba pedagógica inicial antes de comenzar el pre-experimento

Anexo 19. Guía de observación a clases. Resultados

Anexo 20: Registros de evaluaciones de la dimensión 2 en los subsistemas de clases. Resultados

Anexo 21: Prueba pedagógica final

Anexo 22: Resumen de los resultados alcanzados en los períodos de experimentación

Anexo 23: Resumen de los resultados por indicador de la PPI y la PPF. Prueba de hipótesis

Anexo 24: Resultados de la nota final de la asignatura AM I

Anexo 25: Participación en eventos y publicaciones

## Anexo 2: Análisis del rendimiento académico de los estudiantes

**Objetivo:** analizar el comportamiento del rendimiento académico de los estudiantes en la disciplina Análisis Matemático, en la formación inicial del profesor de Matemática- Física.

Estos datos se han obtenido de los registros y actas de notas de la secretaría docente de la Facultad de Educación Media de la Universidad de Pinar del Río.

**Nota:** Los números que aparecen sumados en rojo, representan la cantidad de estudiantes que luego de suspender el examen final (EF) aprobaron el extraordinario o mundial (EXT) y se incorporan dentro de los aprobados.

**Tabla 2.1: Resultados del AM I**

Cursos	Total	5 puntos	4 puntos	3 puntos	Suspensos EF	Suspensos EXT	Arrastre	Suma
10-11	34	3	1	11+3	19	16	0	
11-12	27	4	4	16+3	3	0	0	
12-13	19	1	3+2	4+4	11	5	3	
13-14	38	9	15	8+3	6	3	0	
14-15	53	12	18	13	10	0	0	
15-16	37	3	5	13	16	8	-	
<b>Total</b>	<b>208</b>			<b>78</b>		<b>32</b>		<b>110</b>
<b>%</b>				<b>37,5</b>		<b>15,4</b>		<b>52,9</b>
<b>Total</b>	<b>208</b>	<b>32</b>	<b>48</b>					<b>80</b>
		<b>15,4</b>	<b>23,1</b>					<b>38,5</b>

**Tabla 2.2: Resultados del AM II**

Cursos	Total	5 puntos	4 puntos	3 puntos	Suspensos EF	Suspensos EXT	Arrastre	Suma
10-11	23	4	4	8+5	7	2	0	
11-12	26	5	2+2	7+2	12	8	0	
12-13	19	2	3	11+2	3	3	1	
13-14	36	1	9	17	9	9	0	
14-15	45	6	10	16	13	7	3	
15-16	-	-	-	-	-	-	-	
<b>Total</b>	<b>149</b>			<b>68</b>		<b>29</b>		<b>97</b>
				<b>45,6</b>		<b>19,5</b>		<b>65,1</b>
<b>Total</b>	<b>149</b>	<b>18</b>	<b>30</b>					<b>48</b>
<b>%</b>		<b>12,1</b>	<b>20,1</b>					<b>32,2</b>

Tabla 2.3: Resultados del AM III

Cursos	Total	5 puntos	4 puntos	3 puntos	Suspensos EF	Suspensos EXT	Arrastre	Suma
11-12	16	3	5	5	3	3	0	
12-13	21	0	2+1	6+3	13	9	9	
13-14	19	2	3+1	5+6	9	2	0	
14-15	32	2	5	20+5	5	0	0	
15-16	37	0	6	0+10	31	21	-	
<b>Total</b>	<b>125</b>			<b>60</b>		<b>35</b>		<b>95</b>
<b>%</b>				<b>48,0</b>		<b>28,0</b>		<b>76,0</b>
<b>Total</b>	<b>125</b>	<b>7</b>	<b>23</b>					<b>30</b>
		<b>5,6</b>	<b>18,4</b>					<b>24,0</b>

Tabla 2.4: Resultados del AM IV

Cursos	Total	5 puntos	4 puntos	3 puntos	Suspensos EF	Suspensos EXT	Arrastre	Suma
11-12	14	2	1+1	3+3	8	4	4	
12-13	17	1	1	10	5	5	5	
13-14	18	2	3	4	9			
14-15	33	6	7	14+6	6	0	0	
15-16	-	-	-	-	-	-	-	
<b>Total</b>	<b>82</b>			<b>40</b>		<b>9</b>		<b>49</b>
<b>%</b>				<b>48,8</b>		<b>11,0</b>		<b>59,8</b>
<b>Total</b>	<b>82</b>	<b>11</b>	<b>13</b>					<b>24</b>
<b>%</b>		<b>13,4</b>	<b>15,9</b>					<b>29,3</b>

Tabla 2.5: Resultados del AM V

Cursos	Total	5 puntos	4 puntos	3 puntos	Suspensos EF	Suspensos EXT	Arrastre	Suma
12-13	9	2	1	3+1	3	2	0	
13-14	11	3	2+1	2+3	4	0	0	
14-15	15	1	2	4+3	8	5	0	
15-16	31	5	3+1	14+4	9	4	-	
<b>Total</b>	<b>66</b>			<b>34</b>		<b>11</b>		<b>45</b>
<b>%</b>				<b>51,5</b>		<b>16,7</b>		<b>68,2</b>
<b>Total</b>	<b>66</b>	<b>11</b>	<b>10</b>					<b>21</b>
<b>%</b>		<b>16,7</b>	<b>15,2</b>					<b>31,9</b>

**Tabla 2.6: Resumen de bajo rendimiento**

AM	Total	3 puntos	Suspensos Ext.	Suma	%
AM I	208	78	32	110	52,9
AM II	149	68	29	97	65,1
AM III	125	60	35	95	76,0
AM IV	82	40	9	49	59,8
AM V	66	34	11	45	68,2
Total	630			396	62,9

### **Anexo 3: Entrevista a profesores de Matemática**

**Objetivo:** determinar posibles causas que influyen negativamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos del Análisis Matemático.

Se está realizando una investigación con el objetivo de perfeccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en los contenidos del Análisis Matemático, en la carrera de Licenciatura en Educación Matemática, usted fue seleccionado por su experiencia y resultados en la disciplina Análisis Matemático, por lo cual se necesita de su colaboración.

#### **Cuestionario**

1. Mencione algunas causas que a su entender, estuvieran incidiendo en el aprendizaje de los contenidos del Análisis Matemático.
2. ¿Qué no debe faltar en una conferencia, para que haya eficiencia en el aprendizaje de los contenidos?
3. ¿Cómo concibe una clase práctica?
4. Según su experiencia, ¿cuáles son las causas más significativas que influyen en el aprendizaje de los contenidos del Análisis Matemático, en la carrera?
5. Durante las conferencias, ¿los estudiantes se apropian de los nuevos conocimientos? ¿qué influye en este proceso?
6. Durante las clases prácticas, ¿los estudiantes presentan los conocimientos necesarios?; durante la solución de ejercicios y problemas ¿se trabaja con individualidad?, ¿por qué?
7. ¿Cómo observa el nivel de desarrollo de procesos de abstracciones, generalizaciones, analogías y organizaciones conceptuales en los estudiantes, durante la solución de ejercicios y problemas?

#### **Anexo 4: Visitas a clases de Análisis Matemático**

##### **Guía de observación a conferencias de Análisis Matemático**

**Objetivo:** comprobar los métodos y procedimientos algorítmicos, los medios de enseñanza y la bibliografía que se utilizan durante el desarrollo de la clase, para el tratamiento de conceptos.

Durante la clase se observarán los siguientes aspectos

1. Complejidad del nuevo contenido.

Nota: Según la experiencia y criterios de profesores.

\_\_\_ Alta \_\_\_ Media \_\_\_ Baja

2. Orden lógico de exposición del contenido.

\_\_\_ Bueno \_\_\_ Regular \_\_\_ Deficiente

3. Tratamiento conceptual y demostración de teoremas.

\_\_\_ Siempre \_\_\_ Casi siempre \_\_\_ A veces \_\_\_ Nunca

4. Utilización de analogías con contenidos anteriores.

\_\_\_ Siempre \_\_\_ Casi siempre \_\_\_ A veces \_\_\_ Nunca

**Criterios de medida:** en el indicador 1, la complejidad depende de la cantidad de conceptos y definiciones que se enseñen, así como el grado de abstracción que se exija para comprenderlos. Los indicadores 3 y 4 se consideran afectados si es A veces o Nunca.

##### **Guía de observación a clases prácticas de Análisis Matemático.**

**Objetivo:** comprobar los métodos, vías y procedimientos algorítmicos que utilizan los estudiantes durante el desarrollo de tareas matemáticas.

comprobar el nivel de independencia de los estudiantes durante el desarrollo de tareas matemáticas.

Durante la clase se observarán los siguientes aspectos:

1. Conocimientos de los estudiantes sobre el contenido a ejercitar.

\_\_\_ Bueno \_\_\_ Regular \_\_\_ Deficiente

2. Aseguramiento de un proceder algorítmico para las actividades planificadas.

\_\_\_ Muy Bien \_\_\_ Bien \_\_\_ Regular \_\_\_ No se hizo

## *Anexos*

3. Relación de las actividades con los contenidos tratados en la conferencia y guía de preparación para la clase práctica.

\_\_\_\_\_ Buena    \_\_\_\_\_ Regular    \_\_\_\_\_ Deficiente

4. Fijación de un método de trabajo para el desarrollo de actividades

\_\_\_\_\_ Muy Bien    \_\_\_\_\_ Bien    \_\_\_\_\_ Regular    \_\_\_\_\_ No se hizo

5. Necesidad de niveles de ayuda del profesor.

\_\_\_\_\_ Demasiado    \_\_\_\_\_ Bastante    \_\_\_\_\_ Poco    \_\_\_\_\_ Ninguno

6. Solución de las actividades propuestas

\_\_\_\_\_ Todas    \_\_\_\_\_ Casi Todas    \_\_\_\_\_ Algunas    \_\_\_\_\_ Deficiente

### **Anexo 5: Encuesta a profesores de Análisis Matemático**

**Objetivo:** determinar la causa que más influencia negativa tendría en el proceso de enseñanza-aprendizaje de no llevarse a cabo en este proceso, de las que a continuación se relacionan.

Se está realizando una investigación con el objetivo final de perfeccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos de la disciplina Análisis Matemático en la carrera Licenciatura en Educación Matemática y usted fue seleccionado por su experiencia y resultados en dicha disciplina, por lo cual se necesita de su colaboración.

#### **Cuestionario**

De los elementos que a continuación le relacionamos, realice el voto ponderado utilizando una escala del 1 hasta el 7, donde en orden ascendente se determinen los elementos que a su juicio con mayor fuerza, están incidiendo en los bajos niveles de aprendizaje de los alumnos.

1. Complejidad de los contenidos.
2. Falta de auto preparación de los estudiantes para las clases prácticas.
3. Insuficientes niveles de abstracción para la comprensión de conceptos propios del AM
4. Incoherencias en el sistema de Conferencia- Consulta- Clase práctica.
5. Falta de analogías y transferencias necesarias de las matemáticas elementales a las superiores.
6. Estructuración y organización lógica de saberes para la dirección racional de la actividad matemática
7. Falta de motivación por la profesión.

Tabla 5. 1: Resultados de la encuesta

Indicador Profesor	1	2	3	4	5	6	7
Profesor 1	4	5	3	6	2	1	7
Profesor 2	5	7	4	6	1	2	3
Profesor 3	5	7	2	6	3	1	4
Profesor 4	7	6	1	5	3	2	4
Profesor 5	6	4	2	6	3	1	5
Profesor 6	3	6	4	5	2	1	7



**Anexo 6: Dimensiones e indicadores del desarrollo del PMA. Criterio de medida y evaluación**

Tabla 6.1: Dimensiones e indicadores del desarrollo del PMA

<b>Dimensión 1:</b> accionar didáctico del profesor para dirigir la actividad cognoscitiva de los estudiantes, en el trabajo con las características esenciales del PMA.		<b>Instrumentos</b>				
<b>Indicadores</b>		<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>
1	Reactivación del sistema de conocimientos necesarios.	X			X	X
2	Utilización del principio de analogía.	X			X	X
3	Aproximación formal en la definición de conceptos.	X			X	X
4	Precisión en la utilización de definiciones.	X			X	X
5	Utilización de la terminología convencional para la definición de conceptos.	X			X	X
6	Representación de un mismo contenido en lenguajes diferentes.	X			X	X
7	Utilización de esquemas conceptuales para modelar el contenido matemático.	X			X	X
8	Utilización de mapas conceptuales para la visualización de relaciones y propiedades.	X			X	X
9	Utilización de procedimientos heurísticos en la búsqueda de una demostración.	X			X	X
10	Rigurosidad en la representación de la demostración	X			X	X
<b>Dimensión 2:</b> actividad cognoscitiva de los estudiantes, relacionada con las características esenciales del PMA.						
11	Determinación de características esenciales en los análisis que se realizan durante el desarrollo de actividades matemáticas.		X	X	X	
12	Coherencia en las argumentaciones.		X	X	X	
13	Significatividad en la relación concepto-definición.		X	X	X	
14	Utilización correcta de definiciones.		X	X	X	
15	Conversión del lenguaje común al lenguaje técnico de la matemática.		X	X	X	
16	Identificación de un mismo concepto en formalizaciones diferentes.		X	X	X	
17	Utilización de esquemas gráficos de apoyo a la racionalización del trabajo mental.		X	X	X	
18	Representación de un concepto en diferentes registros semióticos.		X	X	X	
19	Logicidad en la búsqueda de la demostración.		X	X	X	
20	Formalización en la representación de la demostración.		X	X	X	

Leyenda:

A: Revisión de documentos normativos; B: Prueba pedagógica; C: Entrevista a estudiantes; D: Observaciones a clases, E: Encuesta a profesores.

### Criterio para medir y evaluar los indicadores

Para medir y evaluar los indicadores se tendrá en cuenta la definición de las características esenciales del PMA dada en el epígrafe 1.1 y la caracterización realizada para cada indicador en el epígrafe 1.5, con el objetivo de precisar las acciones relacionadas con estos.

A cada indicador se le otorgará un valor de 1 a 5 puntos con el siguiente consenso: [muy adecuado (MA) = 5], [bastante adecuado (BA) = 4], [adecuado (A) = 3], [poco adecuado (PA) = 2], [inadecuado (IA) = 1].

*Muy adecuado:* se otorga cuando hay muy buena calidad en las acciones relacionadas con el indicador, estas son suficientes y expresan un excelente desarrollo del indicador de forma oportuna y siempre que es necesario.

*Bastante adecuado:* se otorga cuando hay muy buena calidad en las acciones relacionadas con el indicador, pero estas no son suficientes, no se evidencian en todos los contextos propicios, o no se aprovecha al máximo todas las oportunidades para manifestar o desarrollar el indicador.

*Adecuado:* la calidad de las acciones que evidencian el indicador es buena pero puede ser mejor, su desarrollo es suficiente pero puede ser potencialmente superior, no se manifiesta o desarrolla el indicador siempre que es posible.

*Poco adecuado:* la calidad de las acciones relacionadas con el indicador es regular, estas pueden hacerse mejor, la manifestación o desarrollo del indicador es medio.

*Inadecuado:* la calidad de las acciones relacionadas con el indicador es insuficiente, presentan limitaciones, no se evidencia manifestación o desarrollo del indicador.

### Procedimiento para calcular el índice de evaluación

El índice de la dimensión por estudiante ( $I_{est}$ ), *horizontalmente*, se determinará como:  $I_{est} = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot C_{ei}}{P_m T}$

donde  $n$  son todos los valores de la escala,  $V_i$  es el valor del indicador  $i$ ,  $C_{ei}$  es la cantidad de evaluaciones que se le otorgó al indicador  $i$ ,  $P_m$  es el puntaje máximo de ponderación y  $T$  es el total de indicadores u observaciones por indicador (en caso de que se evalúe el indicador). El índice máximo es 1 cuando  $V_i = P_m$  para todo  $i = 1; 2; 3 \dots n$  y el mínimo es  $\frac{T \text{Min}\{V\}}{P_m T} = \frac{\text{Min}\{V\}}{P_m}$ .

La escala determinada es:

Tabla 6.2: Escala para determinar la evaluación a partir del índice

Evaluación	(MA)	(BA)	(A)	(PA)	(I)
Índice	(0,85; 1]	(0,70; 0,85]	(0,55; 0,70]	(0,40; 0,55]	(0,20; 0,40]

Para el índice de las dimensiones ( $I_d$ ) se procede de la misma forma que para los estudiantes pero

multiplicando el divisor por el total de estudiantes ( $T_e$ ), o sea,  $I_d = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot C_{ei}}{P_m T \cdot T_e}$ .

Para determinar el índice del indicador ( $I_{ind}$ ), *verticalmente*, se calcula  $I_{ind} = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot C_i}{P_m T}$  donde  $n$  son todos los valores de la escala,  $V_i$  es el valor del indicador  $i$ ,  $C_i$  es la cantidad de indicadores que obtuvieron el valor  $V_i$ ,  $P_m$  es el puntaje máximo de ponderación y  $T$  es el total de evaluaciones por indicador. En este caso para determinar el índice de evaluación de la dimensión se promedia el índice de los indicadores de esta.

#### **Anexo 7: Guía para el estudio de documentos normativos en la formación inicial del profesor**

**Objetivo:** obtener información a partir del análisis de los documentos seleccionados, referido a las orientaciones metodológicas sobre el desarrollo del PMA en la formación inicial del profesor de Matemática.

**Nota:** La revisión de los documentos normativos se rige por la definición conceptual y operacional del desarrollo del PMA. Los indicadores determinados constituyen lineamientos para emitir una respuesta conclusiva a las siguientes interrogantes.

##### 1. Modelo del profesional y Plan de estudio.

Se debe analizar si se hace referencia a los siguientes elementos:

- ¿Cuál es la concepción de desarrollo del pensamiento, como parte integral del desarrollo de la personalidad?
- ¿En los objetivos se expresa la importancia del desarrollo del PMA en la formación del profesor de Matemática? De no quedar explícita ¿cuáles son las aproximaciones? y ¿en qué medida se ajusta a la concepción de esta investigación?

##### 2. Programa de la disciplina Análisis Matemático y sus asignaturas correspondientes.

Orientaciones metodológicas dirigidas responder las siguientes interrogantes:

- ¿Cómo construyen los estudiantes los objetos matemáticos con paso al límite?
- ¿Cómo asocian los estudiantes, el significado un símbolo, mediante el proceso de formalización-definición? (coordinación de registros semióticos).
- ¿Cómo potenciar, desde la clase de AM, las características esenciales del PMA?

Se debe analizar la referencia en torno a las categorías didácticas siguientes:

##### 2.1 Categoría objetivo:

- ¿Se evidencian desde los objetivos exigencias encaminadas a potenciar el desarrollo del PMA? De no quedar explícita ¿cuáles son las aproximaciones?
- ¿Se aprecian niveles crecientes en las exigencias de los objetivos relacionadas con el desarrollo del PMA de una asignatura a otra, en la medida en que avanza la disciplina?

- c) ¿Las habilidades y conocimientos declarados contribuyen a estimular el desarrollo del PMA?
- d) ¿Conciben el PEA del AM desde una concepción desarrolladora?

## 2.2 Categoría contenido.

- a) ¿Se encuentran de acuerdo con los objetivos propuestos en el programa?
- b) ¿Resultan suficientes para alcanzar los objetivos propuestos?
- c) ¿Están lógicamente estructurados?
- d) ¿El sistema conceptual manifiesta relaciones de subordinación de conceptos, que se complementen gradualmente durante toda la asignatura?
- e) ¿Su organización propicia un adecuado análisis teórico de conceptos?

## 2.3 Categoría métodos.

- a) ¿Los métodos declarados resultan apropiados para alcanzar los objetivos previstos y para el tratamiento de contenidos con paso al límite?
- b) ¿Potencian el PEA del AM desde una concepción desarrolladora?
- c) ¿Permiten problematizar el contenido para la apropiación significativa de contenidos con paso al límite?
- d) ¿Propician un clima afectivo en la clase y la comunicación entre los integrantes del grupo?

## 2.4 Categoría medios de enseñanza.

- a) ¿Cómo se proyectan los medios de enseñanza del AM en función de estimular el desarrollo del PMA?, ¿son adecuados?, ¿son suficientes?
- b) ¿Se proyecta la utilización de los medios de enseñanza desde una concepción desarrolladora en el PEA del AM?

## 2.5 Categoría formas de organización.

- a) ¿La planificación de las formas de organización para el PEA de los contenidos de AM, tributan al desarrollo de las características esenciales del PMA?
- b) ¿La secuencia sistemática de las formas de organización tributan al desarrollo y consolidación de las características esenciales del PMA?
- c) ¿Potencian las formas de organización la participación activa y regulada de los estudiantes y el grupo en la construcción de conocimientos?

## 2.6 Categoría evaluación:

- a) ¿Las formas de evaluación que se proyectan en el PEA del Análisis Matemático, tributan a determinar el nivel de desarrollo del PMA?, ¿en qué medida?

- b) ¿Qué indicadores en el sistema de evaluación determinan el nivel de desarrollo del PMA?, ¿cuál es el criterio de media?
  - c) ¿Resultan adecuadas las formas de evaluación en relación con el resto de los componentes didácticos del proceso?
3. Guía para la revisión de informes de promoción y validación de asignaturas y disciplina AM.
- a) ¿Los objetivos que se reportan con mayores dificultades guardan relación con los indicadores que determinan el nivel de desarrollo del PMA?
  - b) ¿Existen elementos para asumir que las insuficiencias declaradas en el desempeño de los estudiantes en el PEA del AM, están dadas por el insuficiente desarrollo del PMA?
  - c) ¿Qué otros aspectos relacionados con el desarrollo del PMA se reportan como debilidades y fortalezas, desde el resto de los componentes didácticos?
  - d) ¿Existe proyección, desde el trabajo metodológico de la disciplina o del colectivo de asignatura, para la profundización en torno a las potencialidades que poseen los contenidos del AM para el desarrollo del PMA?

## Anexo 8: Prueba pedagógica para el diagnóstico inicial. Resultados

**Objetivo:** evaluar el nivel de desarrollo alcanzado por los estudiantes en las características esenciales del PMA, mediante el desarrollo de actividades relacionadas con los contenidos de límite, continuidad, derivada de una función y la demostración matemática.

Estimado estudiante: se está realizando una investigación sobre el desarrollo del PMA desde la disciplina AM. A continuación le presentamos un sistema de actividades en el desarrollo de las cuales tendrás la oportunidad de interactuar con el profesor en la medida en que este lo solicite. El ejercicio del instrumento es individual y anónimo, todas las respuestas y argumentaciones son por escrito. Agradecemos su colaboración.

### Cuestionario

1. Sea la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la ley de correspondencia está dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

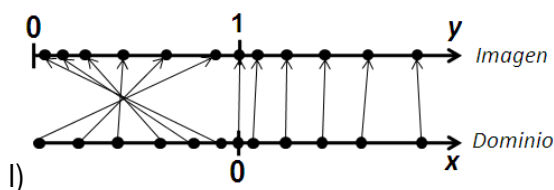
- ¿ $f$  se puede representar en un solo sistema de coordenadas rectangulares?
- ¿Es necesario representar la función  $f$  en dos sistemas de coordenadas rectangulares?
- Representa gráficamente la función  $f$

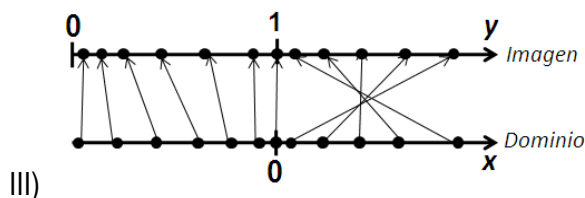
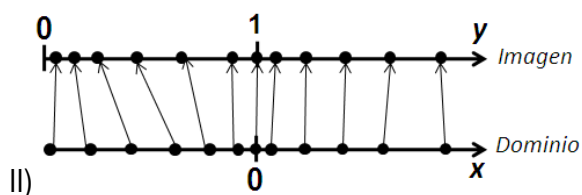
*El profesor indicará a los estudiantes que utilizaron dos sistemas de coordenadas: "Explica por qué hay que representar la función en dos sistemas"*

1.1 Diga verdadero (V) o falso (F): Sea la función  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(t) = -2t$  para  $t < 0$  y  $g(t) = \sqrt{t} + 1$  para  $t \geq 0$ . Entonces para todos los valores del dominio de las funciones  $f$  y  $g$  se cumple que:

- ☐  $f = g$       ☐  $f \neq g$
- Fundamenta cada caso anterior.

1.2 Si nos acercamos (por la derecha y por la izquierda) al valor del dominio  $x = 0$ . Seleccione el esquema más sugerente que describe la relación dominio-imagen de  $f$ .





1.3 Calcule los límites laterales de la función  $f$  en el punto  $x = 0$ .

a) ¿Existe el límite en dicho punto? Argumenta.

1.4 Enuncie la definición de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  en el lenguaje de sucesiones y en el lenguaje  $\epsilon - \delta$ . En caso de que no las recuerde con precisión, explique con sus palabras el significado de límite.

*El profesor revisará y registrará la cantidad de estudiantes que logró enunciar una definición, dos definiciones y los que explicaron con sus palabras. A cada uno asignará bien, regular, mal a la respuesta dada. Posteriormente, escribirá en pizarra las definiciones:*

*Definición (Límite de una función por sucesiones) (Valdés y Sánchez, 2017, p.97)*

*Se dice que  $l \in \mathbb{R}$  es límite de la función  $f$  cuando  $x$  tiende al punto  $a$  si se verifica que para toda sucesión  $\{x_n\}$  tal que  $x_n \in \text{Dom}f$ ,  $x_n \rightarrow a$ , y  $x_n \neq a$ , se cumple que  $f(x_n) \rightarrow l$*

*Definición (Límite de una función en el lenguaje  $\epsilon - \delta$ ) (Valdés y Sánchez, 2017, p.106)*

*$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ , si y solo si, para todo  $\epsilon > 0$ , tal que si  $x \in \text{Dom}f$  y  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$*

1.5 A su consideración:

- ¿cuál de las definiciones anteriores consideras que es más práctica para demostrar la existencia o no del  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ?
- Escoja una de las dos definiciones y demuestre que dicho límite no existe.
- ¿Qué tipo de demostración utilizaste?

1.6 Analice la continuidad de  $f(x)$  en el intervalo  $I = [-1; 1]$ .

2. En el gráfico 2.1, se tienen las rectas  $r$ ,  $t$  y  $f(x) = \ln x$ , tal que  $r \cap f = \{A, B\}$  y  $t \cap f = \{A\}$ . Diga verdadero o falso. Argumente en cada caso.

- \_\_\_ La recta  $r$  es tangente al gráfico de la función en los puntos  $A$  y  $B$ .
- \_\_\_ Si la pendiente de  $r$  es  $m_r$  entonces  $m_r = \tan \theta = f'(1)$

c) \_\_\_\_ Si  $f'(1)$  es la derivada de  $f$  para  $x = 1$ , entonces la pendiente de la recta  $t$  es  $m_t = f'(1)$ .

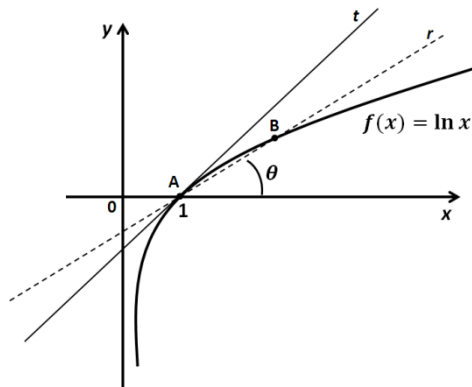


Gráfico 2.1

3. En el gráfico 3.1 se tienen las funciones  $h(t) = at + b$  y  $w(t) = 3t - t^2$ ,  $h \cap w = \{P\}$ .

- Utilice la definición, calcule la función derivada  $w'(t)$ .
- Halle la ecuación de  $h(t)$ .

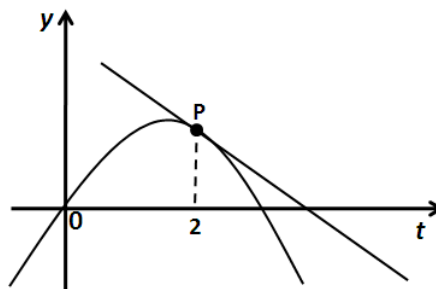


Gráfico 3.1



Tabla 8.1: Presencia de indicadores en la prueba pedagógica del diagnóstico inicial

	Indicadores	Actividades
1	Determinación de características esenciales en los análisis que se realizan durante el desarrollo de actividades matemáticas.	1. a), b) c); 1.1 b); 1.3 a); 1.5 c); 1.6
2	Coherencia en las argumentaciones.	1. a) b); 1.1 b); 1.3 a); 1.5 a), c); 2 a), b), c); 3. b)
3	Significatividad en la relación concepto-definición.	1.1 a); 1.2; 2 a), b), c)
4	Utilización correcta de definiciones.	1.4; 1.5 b); 2 a); 3 a)
5	Conversión del lenguaje común al lenguaje técnico de la matemática.	1.3 a); 1.4; 1.5 b); 3. a) b)
6	Identificación de un mismo concepto en formalizaciones diferentes.	1.1 a); 2. b) c)
7	Utilización de esquemas gráficos de apoyo a la racionalización del trabajo mental.	1. a), b); 1.1 a); 1.3 a); 1.5 b)
8	Representación de un concepto en diferentes registros semióticos.	1. c); 1.1 a); 3. a) b)
9	Logicidad en la búsqueda de la demostración.	1.5 b); 1.3 a); 2. a); 1.6
10	Formalización en la representación de la demostración.	1.5 b)

**Nota:** Esta organización no es la única para visualizar la presencia de indicadores, pueden existir otras actividades dentro de la prueba pedagógica interactiva en la que se presencie mejor un determinado indicador, en dependencia de la respuesta del estudiante. Además, en la evaluación se deben seguir los criterios de observación de los indicadores dados en el epígrafe 1.5 y el criterio de medida del Anexo 6.

### Resultados de la prueba pedagógica

1. **a)** 36 (85,7%) afirman que se puede representar en un solo sistema; **b)** 4 (9,5%) respondieron que es necesario dos sistemas, 2 (4,8%) no respondieron el a) ni el b); **c)** 11 (26,2%) representaron bien la función; 2 (4,8%) no lo hizo; 29 (69%) representaron mal la función, de estos 24 (57,1%) *representaron las dos ramas de la función  $f$  como funciones independientes definidas en todo  $R$ .*
- 1.1 **a)** 8 (19%) respondieron que las funciones son iguales; 31 (73,8%) respondieron que las funciones son diferentes, 3 (7,1%) no respondieron; **b)** 7 (16,7%) argumentaron bien, 32 (76,2%) argumentaron mal, 3 (7,1%) no argumentaron. *Se destaca que los 7 que argumentaron bien, representaron gráficamente la función  $g$ .*
- 1.2 Solo 10 (23,8%) estudiantes seleccionaron el gráfico correcto, *todos estos habían representado correctamente la función en el 1. c)*; 25 (59,5%) lo seleccionaron mal y 7 (16,7%) no lo hicieron, luego se evalúa como inadecuado en 32 (76,2%) estudiantes.
- 1.3 33 (78,6%) calcularon bien los límites laterales, de estos, 30 (71,4%) afirmaron que no existe el límite y argumentaron bien, 3 (7,1%) dijeron que si existe y que eran los dos límites laterales; 6 (14,3%) calcularon mal los límites laterales y 3 (7,1%) no hicieron esta actividad. Por tanto solo 12 (28,6%) estudiantes presentaron dificultad en esta actividad. Es importante señalar que de los 30 que realizaron bien esta actividad 19 (45,2%) habían representado mal la función en la actividad 1. c), esto

quiere decir que *no les fue necesaria la representación gráfica para calcular bien el límite, pero entonces no hubo coordinación de registros semióticos, ni significatividad, ni logicidad en sus razonamientos*; porque la respuesta debió haber sido errada en correspondencia con el mal resultado del 1 c.

- 1.4** Solo 4 (9,5%) estudiantes enunciaron correctamente las definiciones pedidas; 11 (26,2%) explicaron acertadamente con sus palabras el significado de límite y se aproximaron a una caracterización adecuada de las características esenciales del concepto, de estos 7 (16,7%) *se auxiliaron de una representación gráfica*; 9 (21,4%) lo intentaron pero su descripción no fue adecuada; 18 (42,9%) no lo hicieron. *Los estudiantes por lo general no recuerdan con precisión las definiciones y presentan dificultades al formalizar proposiciones y características esenciales.*
- 1.5 a)** 21 (50%) afirmaron que la definición más práctica es por sucesiones, de estos 18 la utilizaron y 3 lo intentaron con las dos definiciones; 12 (28,5%) afirmaron que la definición más práctica es en el lenguaje  $\varepsilon - \delta$ , de estos 11 la utilizaron y 1 utilizó las dos definiciones; 4 (9,5 %) afirmaron que las dos son igualmente prácticas, de estos 3 utilizaron  $\varepsilon - \delta$  y 1 lo intentó con sucesiones; 5 (11,9%) no respondieron a la pregunta; **b)** solo 8 (19%) demostraron bien la no existencia del límite y todos utilizaron la definición por sucesiones; 11 (26,2%) demostraron poco adecuado la no existencia del límite, de estos 8 por sucesiones y 3 por  $\varepsilon - \delta$ ; 19 (45,2%) realizaron mal la demostración; 4 (9,5%) no realizaron la demostración; **c)** 5 (11,9%) dijeron correctamente el tipo de demostración, 21 (50%) lo dijeron mal y 16 (38,1%) no respondió el inciso. De estos resultados se concluye que *34(80,9%) estudiantes presentan dificultades al utilizar elementos de definición de límite para realizar la demostración, presentan incoherencias en la utilización de símbolos, falta de equivalencia y logicidad en la secuencia de razonamientos, además 37 (88,1%) no identificaron correctamente el tipo de demostración.*
- 1.6** 14 (33,3%) analizaron correctamente la continuidad de la función en el intervalo dado, *los 11 que representaron bien la función 1. c) y 3 que no tenían correctamente la representación pero calcularon bien los límites laterales en el 1.3*; 11 (26,2%) analizaron parcialmente la continuidad en el intervalo dado, estos analizaron correctamente que era discontinua en  $x_0 = 0$ , pero *en la respuesta no generalizaron a todo el intervalo*; 13 (30,9) lo hicieron mal; 4 (9,5%) no hicieron la actividad.
- 2. a)** 33 (78,6%) afirmaron que es falsa, de estos, solo 12 (28,6%) argumentaron correctamente, los 21 restantes *negaron lo que ya habían dicho que es falso*, o sea, plantean que: *porque no es tangente*; 9 (21,4%) plantearon que es verdadera, porque la cortaba en al menos un punto, otros porque cortaba la curva; **b)** 17 (40,5%) afirmaron que es verdadera, de estos solo 13 argumentaron correctamente, 4 no argumentaron; 25 (59,5%) afirmaron que es falsa, de estos 8 no fundamentaron y 17 fundamentaron mal, unos plantearon que *los tres términos no son iguales*, otros *asignaron valores particulares a la*

- Tabla 8.2: Evaluación de los indicadores de la dimensión 2 en la prueba pedagógica del diagnóstico inicial

	Escala de medición						
Ind.	MA	BA	A	PA	IA	Ind.	Ev.
1	2	4	9	23	4	0,49	PA
2	4	7	9	12	10	0,52	PA
3	2	3	13	15	9	0,48	PA
4	3	4	8	10	17	0,44	PA
5	6	8	11	12	5	0,59	A
6	4	4	18	11	5	0,56	A
7	3	4	8	12	15	0,45	PA
8	4	6	8	17	7	0,52	PA
9	2	3	5	10	22	0,38	IA
10	1	2	4	14	21	0,35	IA
Dimensión 2						0,48	PA

## **Anexo 9: Entrevista a estudiantes en formación de la carrera Licenciatura en Educación Matemática-Física. Resultados**

**Objetivo:** obtener información sobre las creencias y concepciones que tienen los estudiantes relacionadas con el desarrollo de las características esenciales del PMA.

Se está realizando una investigación cuyo objeto es el desarrollo del PMA desde la disciplina AM, queremos desarrollar con usted una conversación dinámica, flexible y fluida, pues se considera que sus creencias y concepciones sobre el tema, contribuirán en gran medida a revelar significativa información para perfeccionar el PEA de dicha disciplina.

1. ¿Considera que es necesario el estudio de los contenidos de la disciplina análisis Matemático?, ¿los conceptos de límite, continuidad, cálculo diferencial e integral, etc.? Si el estudiante no los relaciona con la fundamentación de la matemática escolar, inducir la pregunta ¿los relacionas con la matemática escolar?
2. ¿Considera que es complejo aprender los conceptos de límite, continuidad, series, cálculo diferencial e integral, etc.?, ¿por qué? Del contenido que ha estudiado, ¿cuál le resultó más difícil y cuál más fácil?, ¿dónde cree que está la diferencia?
3. Para comprender los conceptos que implican procesos con paso al límite, es necesario un elevado nivel de abstracción, ¿Sabe a qué se refiere el nivel de abstracción, con sus palabras?, ¿le gusta que el profesor exija que argumente sus razonamientos?, ¿por qué?
4. ¿Sabe la relación que existe entre concepto y definición?, ¿en la disciplina AM siempre se puede utilizar la definición para resolver los ejercicios o problemas que plantea el profesor?
5. Durante la resolución de un ejercicio o problema, ¿qué le gusta más explicar verbalmente, sus ideas matemáticas de la solución o escribirlas en libreta o pizarra? Si el profesor propone un ejercicio o problema, ¿puedes escribirlo de una forma diferente?, ¿te das cuenta cuando el profesor pregunta lo mismo de maneras diferentes?
6. ¿Le gusta realizar dibujos, esquemas o gráficos cuando resuelve un ejercicio o problema?, ¿por qué?, ¿Cree que ayudaría en algo a buscar la solución?. ¿Ha escuchado alguna vez la palabra *semiótica* o *registro semiótico*?
7. ¿Le gustan las actividades matemáticas en la que tenga que demostrar?. Para usted ¿qué es demostrar?, ¿por qué es importante la demostración matemática?, ¿cuáles son las vías de demostración que conoce?
8. ¿Considera que tiene un adecuado desarrollo del PMA?, ¿por qué?

*¡Gracias por su colaboración!, ¡Sus respuestas y comentarios serán muy valiosos para la investigación!*

### 9.1 Principales resultados de la entrevista a estudiantes durante el diagnóstico inicial

- ✓ La mayoría de los estudiantes consideran que no es necesario el estudio de los contenidos del AM para su desempeño como profesores de la Matemática escolar, argumentan que los contenidos de límite, continuidad, cálculo diferencial e integral no se estudian en la enseñanza media y que por lo tanto no es necesario estudiarlos.
- ✓ Todos los estudiantes entrevistados afirmaron que es difícil aprender los contenidos de AM, y la mayoría afirmó que son los contenidos más difíciles que se estudian en la carrera, tampoco saben argumentar porqué plantean que es difícil, unos dicen que los ejercicios son complicados y difíciles, plantean que es mejor calcular límite que resolver una integral.
- ✓ A la mayoría le es difícil decir que es abstracción, plantean que *es pensamiento, imagen, lo que uno piensa, etc.* No les gusta argumentar, dicen que *la argumentación nunca es exactamente lo que hay que decir* y plantean que *les gusta más resolver los ejercicios*.
- ✓ La mayoría no diferencia entre concepto y definición, para su explicación refieren ejemplos de objetos matemáticos, muchos plantean que siempre utilizan las definiciones para resolver ejercicios, cosa que no es totalmente cierta en AM.
- ✓ La mayoría de los estudiantes prefiere escribir en sus libretas antes que explicar cómo lo hizo y mucho menos ir a pizarra, sobre esto último, unos plantean que para no equivocarse delante de los demás, otros porque no se concentran, otros dicen que no saben escribir con tiza. Muchos plantean que pueden escribir a su manera lo que quiere decir el ejercicio, y que el profesor siempre pone ejercicios de la misma forma.
- ✓ La mayoría plantea que en el AM no se pueden hacer esquemas que es más trabajar con variables y por tanto no sirven para buscar soluciones, plantean que en AM que solo se grafican funciones. Ninguno afirmó haber escuchado la palabra semiótica, ni registros de representación semiótica.
- ✓ Algunos de los estudiantes plantean que solo demuestra en Geometría, la mayoría afirma que en AM casi nunca no se demuestran ejercicios, solo se calcula límite, derivadas, se grafican funciones, etc. Por demostrar entienden, llegar a decir que dos cosas son iguales, figuras iguales, miembro izquierdo igual al miembro derecho, entre otras similares. Pocos se refirieron a la demostración directa y al contraejemplo como vías de demostración.
- ✓ En la entrevista primero hubo que explicar al estudiante, aproximadamente, que era tener un adecuado desarrollo del PMA. Casi ninguno dijo que sí, pero casi ninguno dijo que no, la respuesta predominante fue *más o menos*, dicha respuesta la asocian a que entienden al profesor y saben responder algunos ejercicios.

## Anexo 10: Guía de observación científica a clases de Análisis Matemático. Resultados

Universidad de Pinar del Río

**Objetivo:** evaluar el cumplimiento de las características esenciales del desarrollo del PMA.

**Tipo de actividad:** Conferencia: \_\_\_\_\_ Clase práctica: \_\_\_\_\_

Escala de Medición: muy adecuado (MA); bastante adecuado (BA); adecuado (A); poco adecuado (PA); inadecuado (IA).

Tabla 10.1: Indicadores a evaluar durante la observación científica a clases de AM

	Indicadores	E. de medición				
		MA	BA	A	PA	IA
No	<b>Dimensión 1:</b> accionar didáctico del profesor para dirigir la actividad cognoscitiva de los estudiantes, en el trabajo con las características esenciales del PMA.					
1	Reactivación del sistema de conocimientos necesarios.					
2	Utilización del principio de analogía.					
3	Aproximación formal a la definición de conceptos.					
4	Precisión en la definición de conceptos.					
5	Utilización de la terminología convencional para la definición de conceptos.					
6	Representación de un mismo contenido en lenguajes diferentes.					
7	Utilización de esquemas conceptuales para modelar el contenido matemático.					
8	Utilización de mapas conceptuales para la visualización de relaciones entre conceptos.					
9	Utilización de procedimientos heurísticos en la búsqueda de una demostración.					
10	Rigurosidad en la representación de la demostración					
	<b>Dimensión 2:</b> actividad cognoscitiva de los estudiantes, relacionada con las características esenciales del PMA.					
11	Determinación de características esenciales en los análisis que se realizan durante el desarrollo de actividades matemáticas.					
12	Coherencia en las argumentaciones.					
13	Significatividad en la relación concepto-definición.					
14	Utilización correcta de definiciones.					
15	Conversión del lenguaje común al lenguaje técnico de la matemática.					
16	Identificación de un mismo concepto en formalizaciones diferentes.					
17	Utilización de esquemas gráficos de apoyo a la racionalización del trabajo mental.					
18	Representación de un concepto en diferentes registros semióticos.					
19	Logicidad en la búsqueda de la demostración.					
20	Formalización en la representación de la demostración.					

Nota: Se debe seguir el criterio de medida y evaluación dados en el Anexo 6. La evaluación de los indicadores y del cuestionario en general se emite al finalizar la clase que se observa; durante la clase, el evaluador debe observar y hacer apuntes del comportamiento de los indicadores según se manifiesten (porque no se dan en un orden determinado) y la evaluación depende de su predominio durante toda clase

a criterio del evaluador, que debe tener presente el tipo de clase, los objetivos, el contenido, el método y el diagnóstico del grupo.

Tabla 10.2: Resultados de la observación científica a clases de AM

	MA	BA	A	PA	IA	Suma (PA+IA)	%	Índice	Eva.
<b>Ind.</b>	<b>Dimensión 1</b>								
1	6	11	17	23	3	26	43,3	0,58	A
2	4	6	14	30	6	36	60,0	0,51	PA
3	4	10	21	14	11	25	41,7	0,54	PA
4	10	11	20	11	8	19	31,7	0,61	A
5	8	11	33	5	3	8	13,3	0,65	A
6	5	10	21	17	7	24	40,0	0,56	A
7	2	4	13	26	15	41	68,3	0,44	PA
8	3	5	8	28	16	44	73,3	0,44	PA
9	5	7	29	11	8	19	31,7	0,56	A
10	4	13	16	17	10	27	45,0	0,54	PA
<b>Ind.</b>	<b>Dimensión 2</b>								
1	3	7	11	24	15	39	65	0,46	PA
2	5	11	28	9	7	16	26,7	0,59	A
3	5	9	23	15	8	23	38,3	0,56	A
4	2	6	17	16	19	35	58,3	0,45	PA
5	2	4	9	22	23	45	75	0,40	IA
6	3	6	13	23	15	38	63,3	0,46	PA
7	3	4	11	19	23	42	70,0	0,42	PA
8	2	4	8	21	25	46	76,7	0,39	IA
9	4	6	7	14	29	43	71,7	0,41	PA
10	3	5	8	15	29	44	73,3	0,39	IA

## **Anexo 11: Encuesta a profesores de Análisis Matemático. Resultados**

**Objetivo:** diagnosticar la preparación científico-metodológica que tienen los profesores para contribuir a potenciar el desarrollo del PMA, desde el proceso de enseñanza–aprendizaje de la disciplina Análisis Matemático.

Profesor, se está realizando un estudio sobre cómo potenciar el desarrollo del PMA desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos de la disciplina Análisis Matemático, por lo que resulta imprescindible conocer sus criterios y métodos de enseñanza. La información que usted proporcione será utilizada únicamente con fines investigativos. Se agradece anticipadamente su colaboración.

1. ¿Ha tenido usted alguna preparación metodológica relacionada con temas afines al desarrollo del PMA?

Sí\_\_\_\_ No \_\_\_\_

2. ¿Cómo valora la calidad del trabajo metodológico para el PEA de la disciplina Análisis Matemático?

\_\_\_\_ MB      \_\_\_\_ B      \_\_\_\_ R      \_\_\_\_ M

3. ¿Cómo valora la calidad de la preparación metodológica del profesor para el PEA de la disciplina Análisis Matemático?

\_\_\_\_ MB      \_\_\_\_ B      \_\_\_\_ R      \_\_\_\_ M

4. Mencione algún modelo didáctico sobre la enseñanza de la Matemática y diga su idea esencial.

---

---

---

5. Dentro de la teoría de las representaciones semióticas se encuentran las funciones de tratamiento y conversión entre registros semióticos.

a) ¿Tiene conocimientos sobre esta teoría? Si\_\_\_\_ No\_\_\_\_

b) De tener conocimientos, mencione algunos aportes de esta teoría al desarrollo del PMA.

---

---

---

6. El modelo cognitivo APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) es un modelo cognitivo para explicar el proceso de abstracción reflexiva que realiza un estudiante durante la apropiación de conceptos y sirve como base para elaborar descomposiciones genéticas de conceptos.



## *Anexos*

a) ¿Tiene conocimientos sobre la importancia didáctica de éste modelo?

Si\_\_\_\_ No\_\_\_\_

b) ¿Tiene conocimientos sobre la descomposición genética de conceptos?

Si\_\_\_\_ No\_\_\_\_

c) De tener conocimientos sobre la descomposición genética de conceptos, mencione su importancia en el desarrollo del PMA.

---

---

7. Dada la siguiente afirmación: “la reactivación de conocimientos y la utilización del principio de analogía son indispensables para potenciar el nivel de abstracción en los estudiantes”. Usted piensa que:

a) \_\_\_\_ Es verdadera y bastante adecuada.

b) \_\_\_\_ Es verdadera, pero tiene limitantes porque:

---

---

8. Evalúe la calidad y precisión de las orientaciones metodológicas dirigidas a:

a) El trabajo con el concepto y su definición, dentro de la disciplina AM.

\_\_\_\_ MA \_\_\_\_ BA \_\_\_\_ A \_\_\_\_ PA \_\_\_\_ IA

b) La utilización de esquemas y el trabajo con los mapas conceptuales en la disciplina AM.

\_\_\_\_ MA \_\_\_\_ BA \_\_\_\_ A \_\_\_\_ PA \_\_\_\_ IA

c) La utilización de procedimientos heurísticos en la búsqueda de una demostración.

\_\_\_\_ MA \_\_\_\_ BA \_\_\_\_ A \_\_\_\_ PA \_\_\_\_ IA

d) El trabajo con las demostraciones matemáticas dentro de la disciplina AM.

\_\_\_\_ MA \_\_\_\_ BA \_\_\_\_ A \_\_\_\_ PA \_\_\_\_ IA

*¡Gracias por su colaboración!*

### **11.1 Resultados de la encuesta a profesores de AM**

La encuesta se realizó a 10 profesores de AM y se obtuvo que:

1. 2 (20%) plantearon que sí han desarrollado preparación metodológica relacionada con temas afines al desarrollo del PMA y 8 (80%) afirmaron que no.

2. Sobre la calidad del trabajo metodológico para el PEA de la disciplina AM, 3 (30%) afirman que MB; 6 (60%) afirman que B y 1 (10%) afirma que es regular.
3. Sobre la calidad de la preparación metodológica del profesor para el PEA de la disciplina Análisis Matemático 2 (20%) afirman que MB; 7 (70%) afirman que B y 1 (10%) afirma que es regular.
4. Los modelos mencionados fueron el modelo de Polya, el Programa Heurístico General, El PEA desarrollador de la Matemática y la Teoría de la formación por etapas de las acciones mentales propuesta por P. Ya. Galperin. En cada caso dijeron de forma acertada las ideas esenciales del modelo referenciado.
5. 3 (30%) plantearon tener conocimientos sobre la teoría de las representaciones semióticas, comentaron sobre las potencialidades del símbolo para el lenguaje y este para el desarrollo del pensamiento en general, y uno habló sobre la utilización esquemas para la significatividad del aprendizaje del contenido; los 7 (70%) restantes plantearon que desconocían sobre dicha teoría.
6. Solo 1 (10%) planteó tener conocimientos sobre la importancia didáctica del modelo cognitivo APOE, este planteó que tiene conocimientos sobre la descomposición genética de conceptos, lo asoció al modelo de P. Ya Galperin y destacó su importancia para la preparación metodológica del profesor. Se debe destacar que este profesor es de reconocido prestigio dentro del claustro de profesores y fue quien calificó de regular las preguntas 2 y 3 de esta encuesta; 8 (80%) desconocen sobre el modelo cognitivo APOE.

Tabla 11.1: Calidad y precisión de las orientaciones metodológicas

Indicadores		MA	BA	A	PA	IA	Ind.	Ev.
1	El trabajo con el concepto y su definición, dentro de la disciplina AM	0	1	3	5	1	0,48	PA
2	La utilización de esquemas y el trabajo con los mapas conceptuales en la disciplina AM.	0	1	3	4	2	0,46	PA
3	La utilización de procedimientos heurísticos en la búsqueda de una demostración.	0	1	2	6	1	0,46	PA
4	El trabajo con las demostraciones matemáticas dentro de la disciplina AM	0	0	2	7	1	0,42	PA

## Anexo 12. Método Delphy, para evaluar la pertinencia del modelo didáctico para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático avanzado y la estrategia metodológica.

### Metodología

Para la selección de los expertos, se llevó a cabo un muestreo intencional seleccionando 19 docentes con experiencia en la impartición de la disciplina Análisis Matemático o Matemática Superior, que a criterio del investigador cumplen los requisitos de expertos. Se tomaron en consideración los siguientes aspectos: título universitario, categoría docente y científica, años de experiencia docente, dominio del tema y las fuentes de argumentación de sus conocimientos. Distribuidos como se refleja seguidamente:

Tabla 12. 1: Clasificación de expertos

EXPERTOS	TOTAL	Título acad. y Grado Científico
Docentes de la Universidad de Pinar del Río	12	Ms C. (2) Dr C. (10)
Otras universidades nacionales	6	Dr C. (6)
Universidades extranjeras	1	Dr C.

Con el objetivo de determinar el coeficiente de competencia  $K$ , les fue enviada una encuesta a los expertos elegidos. Para su determinación se utilizó la siguiente fórmula  $K = (Kc + Ka) \cdot 0,5$ , donde:

- ✓  $Kc$  representa el coeficiente de conocimiento o información que tiene el experto acerca del tema y se calcula a partir de su propia valoración dentro de una escala del 0 al 10 (0: total desconocimiento del tema y 10: pleno conocimiento del tema, esta multiplicada por 0.1), (Tabla 13.1).
- ✓ EL  $Ka$  representa el coeficiente de argumentación o fundamentación de los criterios del experto y se obtiene del resultado de la suma de los puntos alcanzados, a partir de las respuestas obtenidas en el llenado que realiza la persona de la Tabla 13.2, que se encuentra en el Anexo 13. En dicha tabla, se le pide que marque con una (X), cuál de las fuentes él considera que ha influido en su conocimiento de acuerdo al grado (Alto, Medio, Bajo). Se le debe pedir que responda todas las fuentes. Luego se utilizó una hoja de cálculo programada para calcular los coeficientes de competencia  $K$ . Los resultados se muestran en el Anexo 13, Tabla 13.4.

Finalmente se definió el nivel de competencia para cada experto según los siguientes intervalos:

Tabla 12.2: Intervalos para determinar el nivel de competencia

Nivel de competencia		
Bajo	Medio	Alto
$K < 0,5$	$0,5 \leq K < 0,8$	$0,8 \leq K \leq 1$

### Anexo 13: Encuesta para la selección de expertos. Resultados

Usted ha sido seleccionado para participar como posible experto en la evaluación de un modelo didáctico para potenciar el desarrollo del PMA de los estudiantes de la carrera Licenciatura en Educación Matemática, en la Universidad de Pinar del Río.

Se necesita, antes de realizarle la consulta correspondiente, conocer su coeficiente de competencia en este tema, a los efectos de reforzar la validez del resultado de la misma. Por esta razón se le pide que responda las siguientes preguntas de la forma más objetiva que le sea posible.

#### DATOS GENERALES:

Nombre y apellidos: \_\_\_\_\_

Centro: \_\_\_\_\_ cargo: \_\_\_\_\_

Especialidad: \_\_\_\_\_ años de experiencia: \_\_\_\_\_

Categoría científica: \_\_\_\_\_ categoría docente: \_\_\_\_\_

Actividades docentes, investigaciones o tutorías realizadas, relacionadas con el tema:

\_\_\_\_\_.

1. Marque con una (X) en la tabla siguiente, el valor que se corresponde con el grado de conocimientos que usted posee sobre el tema de investigación. Considere que la escala que se le presenta es ascendente, es decir, el conocimiento sobre el tema referido va creciendo desde 0 hasta 10.

Tabla 13.1: Escala para determinar el  $k_c$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Realice una autoevaluación del grado de incidencia que cada una de las fuentes que se presentan a continuación, ha tenido en su conocimiento y criterios sobre el desarrollo del PMA.

Tabla 13.2: Categorías para determinar el  $k_c$  según las fuentes de argumentación

Nº	Fuentes de argumentación	Grado de influencia		
		Alto	Medio	Bajo
1	Análisis teóricos realizados sobre el tema por usted			
2	Su experiencia profesional en el tema			
3	Trabajos de autores nacionales			
4	Trabajos de autores extranjeros			
5	Su investigación en el tema			
6	Su intuición			

¡Muchas gracias por su colaboración!

## Resultados

Tabla 13.3: Resumen de  $k_c$  de los profesores seleccionados

$K_c$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
Exp.	2	5	2	1	1	1	4	3	0	0

Tabla 13.4: Tabla que determina el coeficiente de argumentación  $Ka$ , el coeficiente de conocimiento ( $Kc$ ), el coeficiente de competencia ( $K$ ) y el nivel de competencia para cada experto

Experto	Fuente de argumentación						$Ka$	$Kc$	$K$	Nivel de competencia
	1	2	3	4	5	6				
E1	0,3	0,5	0,05	0,05	0,04	0,05	0,99	0,9	0,95	Alto
E2	0,1	0,4	0,04	0,05	0,04	0,05	0,68	0,5	0,59	Medio
E3	0,3	0,4	0,05	0,05	0,04	0,05	0,89	0,9	0,90	Alto
E4	0,2	0,2	0,02	0,02	0,02	0,04	0,5	0,4	0,45	Bajo
E5	0,2	0,4	0,04	0,04	0,02	0,04	0,74	0,6	0,67	Medio
E6	0,2	0,5	0,04	0,05	0,04	0,05	0,88	0,8	0,84	Alto
E7	0,3	0,5	0,05	0,05	0,04	0,05	0,99	1	1,00	Alto
E8	0,2	0,5	0,04	0,04	0,02	0,05	0,85	0,4	0,63	Medio
E9	0,2	0,5	0,04	0,04	0,04	0,05	0,87	0,8	0,84	Alto
E10	0,3	0,4	0,05	0,05	0,04	0,05	0,89	0,7	0,80	Alto
E11	0,1	0,5	0,04	0,04	0,02	0,04	0,74	0,3	0,52	Medio
E12	0,3	0,5	0,04	0,05	0,04	0,05	0,98	0,9	0,94	Alto
E13	0,2	0,5	0,05	0,04	0,04	0,05	0,88	1	0,94	Alto
E14	0,1	0,2	0,04	0,04	0,02	0,04	0,44	0,3	0,37	Bajo
E15	0,2	0,4	0,04	0,04	0,02	0,04	0,74	0,3	0,52	Medio
E16	0,3	0,5	0,05	0,04	0,04	0,05	0,98	0,9	0,94	Alto
E17	0,1	0,2	0,04	0,04	0,02	0,04	0,44	0,4	0,42	Bajo
E18	0,2	0,5	0,04	0,04	0,02	0,04	0,84	0,4	0,62	Medio
E19	0,3	0,5	0,04	0,05	0,05	0,05	0,99	0,8	0,90	Alto

Tabla 13.5: Tabla resumen

	Alto	Medio	Bajo
Expertos	10	6	3
Total	16		

#### Anexo 14: Encuesta a los expertos seleccionados. Resultados

Profesor, usted ha sido seleccionado para participar como experto en la investigación que se realiza en el Universidad de Pinar del Río “Hermanos Saíz Montes de Oca”, relacionada con la elaboración de un modelo didáctico para potenciar el desarrollo del PMA y una estrategia metodológica para la implementación de dicho modelo en las clases de AM.

A continuación se le presentan los aspectos más relevantes del modelo y la estrategia metodológica. Por favor, exprese su criterio escribiendo X en la columna de evaluación: muy adecuado (MA); bastante adecuado (BA); adecuado (A); poco adecuado (PA); inadecuado (IA). Se colaboración, evaluación y sugerencias serán muy valiosas.

Tabla 14.1: Tabla para la encuesta a los expertos

	Evaluación				
	MA	BA	A	PA	IA
<b>1.1 Sobre aspectos el modelo, evalúe:</b>					
a) Las bases teóricas que sostienen al modelo en función de las características propias del desarrollo del PMA.					
b) La coherencia en el proceso de modelación.					
c) La correspondencia entre los fundamentos del desarrollo del PMA y los principios declarados.					
d) La función de los principios declarados como lineamientos rectores del desarrollo del PMA.					
e) La organización del esquema para representar las relaciones internas del desarrollo del PMA.					
f) La explicación y coherencia del concepto de núcleo conceptual en la organización del contenido de AM para realizar descomposiciones genéticas de conceptos.					
g) La objetividad de integrar el desarrollo del PMA en las categorías representación en esquemas, visualización lógica, y creatividad matemática, durante las etapas: reflexión y sistematización.					
h) La construcción del método genético-constructivo a partir de las fases de activación-motivación, configuración-significatividad y aplicación-creatividad.					
i) La factibilidad del método genético-constructivo para las clases de Análisis Matemático.					
j) Potencialidad para el desarrollo gradual de las características esenciales del desarrollo del PMA en el tránsito por las etapas determinadas.					
k) La objetividad en las formas de implementación y evaluación del modelo.					
<b>1.2 Sobre los aspectos evaluados como: inadecuado (IA) o poco adecuado (PA). En un Anexo, indique las limitaciones observadas y sugerencias.</b>					
<b>2. Sobre la estrategia metodológica, evalúe:</b>					
a) El objetivo general de la estrategia.					
b) Factibilidad de las etapas planificadas.					
c) Las acciones propuestas para la etapa: preparación metodológica.					
d) El ajuste de la etapa: intervención práctica, a las etapas declaradas en					

## *Anexos*

el modelo y las categorías determinadas para el desarrollo del PMA.					
e) Las acciones determinadas para la categoría: representación en esquemas, durante la intervención práctica.					
f) Las orientaciones metodológicas para las acciones de la categoría: representación en esquemas, durante la intervención práctica.					
g) Las acciones determinadas para la categoría: visualización lógica, durante la intervención práctica.					
h) Las orientaciones metodológicas para las acciones de la categoría: visualización lógica, durante la intervención práctica.					
i) Las acciones determinadas para la categoría: creatividad matemática, durante la intervención práctica.					
j) Las orientaciones metodológicas para las acciones de la categoría: creatividad matemática, durante la intervención práctica.					
k) Las acciones determinadas para la etapa: Evaluación, de la estrategia metodológica.					
l) Los indicadores y elementos determinados para las pruebas pedagógicas inicial y final.					
<b>2.2</b> Sobre los aspectos evaluados como: inadecuado (IA) o poco adecuado (PA). En un Anexo, indique las limitaciones observadas y sugerencias.					

**Primera ronda, total de expertos: 16**

Tabla 14.2: Puntos de corte y escala en la primera ronda

	Puntos de corte y escala							
Ind.	Categorías				Suma	Promedio	N-Promedio	Categoría
	MA	BA	A	PA				
MODELO								
1.1 a)	-3,49	-1,15	0,16	1,53	-2,95	-0,60	2,37	PA
b)	-3,49	-0,67	1,53	3,49	0,86	1,30	0,47	A
c)	-3,49	-3,49	0,00	3,49	-3,49	-0,87	2,64	PA
d)	-3,49	-3,49	-0,16	3,49	-3,65	-0,95	2,72	PA
e)	-3,49	0,49	3,49	3,49	3,98	2,86	-1,09	BA
f)	-1,15	0,89	3,49	3,49	6,72	3,65	-1,87	BA
g)	-0,674	1,15	3,49	3,49	7,46	3,90	-2,13	BA
h)	-0,887	0,89	3,49	3,49	6,98	3,71	-1,94	BA
i)								
j)								
k)	-3,49	-1,53	0,00	3,49	-1,53	0,11	1,67	A
ESTRATEGIA								
2.1 a)	-3,49	0,00	3,49	3,49	3,49	2,62	-0,96	BA
b)	-3,49	-1,53	-0,49	3,49	-2,02	-0,14	1,80	PA
c)	-3,49	-1,15	0,32	3,49	-0,83	0,46	1,20	A
d)								
e)								
f)								
g)								
h)								
i)								
j)								
k)	-3,49	-0,67	0,67	3,49	0,00	0,87	0,79	A
l)	-1,15	0,89	3,49	3,49	6,72	3,65	-1,99	BA



**Segunda ronda, total de expertos: 14**

Tabla 14.3: Puntos de corte y escala en la segunda ronda

	Puntos de corte y escala							
Ind.	Categorías				Suma	Promedio	N-Promedio	Categoría
	MA	BA	A	PA				
MODELO								
1.1 a)	-3,49	-0,37	3,49	3,49	3,12	2,43	1,35	A
b)	-1,068	0,37	3,49	3,49	6,28	3,41	0,38	BA
c)	-0,792	0,37	3,49	3,49	6,55	3,48	0,31	BA
d)	-0,366	1,07	3,49	3,49	7,68	3,93	-0,15	BA
e)	0,3661	3,49	3,49	3,49	10,84	5,33	-1,54	MA
f)	-0,566	0,79	3,49	3,49	7,21	3,74	0,04	BA
g)	-0,566	1,47	3,49	3,49	7,88	4,08	-0,30	BA
h)	-1,465	0,18	3,49	3,49	5,69	3,21	0,57	BA
i)	-3,49	0,57	3,49	3,49	4,06	2,90	0,88	BA
j)	-1,068	0,79	3,49	3,49	6,70	3,62	0,16	BA
k)	-1,068	1,07	3,49	3,49	6,98	3,76	0,03	BA
ESTRATEGIA								
2.1 a)	-0,792	1,07	3,49	3,49	7,26	3,83	0,61	BA
b)	-1,465	0,79	3,49	3,49	6,31	3,52	0,92	BA
c)	-0,366	1,47	3,49	3,49	8,08	4,13	0,31	BA
d)	-0,792	1,47	3,49	3,49	7,65	4,02	0,41	BA
e)	-0,566	1,07	3,49	3,49	7,48	3,88	0,55	BA
f)	0,3661	3,49	3,49	3,49	10,84	5,33	-0,89	MA
g)	-0,366	1,47	3,49	3,49	8,08	4,13	0,31	BA
h)	0,7916	3,49	3,49	3,49	11,26	5,43	-1,00	MA
i)	-0,792	1,47	3,49	3,49	7,65	4,02	0,41	BA
j)	0,5659	3,49	3,49	3,49	11,04	5,38	-0,94	MA
k)	-1,068	1,47	3,49	3,49	7,38	3,96	0,48	BA
l)	-0,566	1,47	3,49	3,49	7,88	4,08	0,36	BA

## **Anexo 15: Análisis de los documentos normativos y reunión científico-metodológica. Resultados**

### **15.1 Análisis de los documentos normativos**

El análisis se hizo según la guía del Anexo 7

Para el desarrollo de esta acción se volvió a hacer un estudio de los siguientes documentos: Planes de Estudio “D y E” para la carrera Educación Matemática-Física y Educación Matemática respectivamente; el Modelo del Profesional; el Programa de las disciplinas y asignaturas; con el fin de analizar las adecuaciones y modificaciones realizadas a los documentos del PLAN E y comparar con las fortalezas y limitaciones detectadas en el epígrafe 1.5.1; además se profundizó en las indicaciones metodológicas generales y particulares de la disciplina y asignatura respectivamente. Esto permitió identificar las potencialidades, debilidades y hacer los reajustes necesarios a la estrategia metodológica.

**15.2 Reunión científico-metodológica:** *El desarrollo del pensamiento matemático avanzado. Categorías del PMA.* Se propone el inicio de un ciclo de trabajo docente-metodológico a nivel de colectivo de Disciplina, que contribuya a incrementar los conocimientos y la preparación de los docentes en el proceso de desarrollo del PMA. En particular el trabajo con la *representación en esquemas*, la *visualización lógica* y la *creatividad matemática*.

*Resultados:* En la reunión metodológica se planifica el período de implementación parcial de la estrategia metodológica y se acuerda establecer un orden lógico de jerarquización entre conceptos de la asignatura Análisis Matemático I. Con el desarrollo de esta acción se logra reorganizar y estructurar los contenidos de la asignatura Análisis Matemático I en tres unidades didácticas y subsistemas de clases; se elaboran mapas conceptuales para las posibles descomposiciones genéticas de conceptos que se harán para elaborar los nuevos conceptos. A continuación se presentan dichos resultados en la Tabla 15.1.

Tabla 15.1: Planificación para la implementación práctica de la estrategia metodológica (CD 17-18 y 19-20)

Acciones	Fecha
1.1 Análisis de los documentos rectores.	3ra semana de Julio
1.2 Desarrollar la reunión científico-metodológica: El desarrollo del PMA. Representaciones conceptuales.	4ta semana de julio
<b>Concentrado metodológico</b>	<b>Agosto</b>
1.3 Desarrollar el taller científico-metodológico: El desarrollo del PMA. Representaciones conceptuales.	4ta semana de agosto
1.4 Desarrollar el taller metodológico: Las bases generadoras del conocimiento y el método genético-constructivo en la enseñanza aprendizaje de los contenidos matemáticos.	4ta semana de agosto
1.5 Desarrollar la clase metodológica instructiva: El tratamiento metodológico a la representación sistémico lógica de estructuras conceptuales en el proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura Análisis Matemático I.	4ta semana de agosto
<b>Inicio del curso escolar</b>	<b>Septiembre</b>
1.6 Realizar el diagnóstico inicial	1ra semana de septiembre
1.7 Desarrollar la clase metodológica demostrativa: El tratamiento metodológico a la representación sistémico lógica de estructuras conceptuales en el proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura Análisis Matemático I.	2da semana de septiembre
1.8 Desarrollar la clase abierta: El tratamiento metodológico a la representación sistémico lógica de estructuras conceptuales en el proceso de enseñanza aprendizaje de la disciplina Análisis Matemático.	2da semana de octubre
<b>Subsistemas de clases (Anexo 11)</b>	
Unidad 1: Sucesiones numéricas	Septiembre-octubre
Subsistema 1	
Subsistema 2	
Subsistema 3	
Unidad 2: Series numéricas	Octubre-noviembre
Subsistema 4	
Subsistema 5	
Unidad 2: Límite y continuidad de funciones reales de una variable real	Noviembre-enero
Subsistema 6	
Subsistema 7	
Subsistema 8	
Taller metodológico de cierre de ciclo.	<b>Enero</b>

Nota: en el caso del CPE del curso 17-18 la planificación se realizó para el período enero-julio y no se realizó el proceso de preparación metodológica con la misma intencionalidad que el CD 17-18 ya que lo trabajó el mismo profesor.

**UNIDAD DIDÁCTICA I: SUCESIONES NUMÉRICAS****1.1 Sucesiones convergentes y divergentes.****Primer subsistema de clases**

- Definición de sucesión numérica.
- Definición de sucesión infinitesimal.
- Sucesiones convergentes y divergentes. Sucesiones infinitamente grandes. Límite de una sucesión numérica. Definiciones equivalentes de límite de una sucesión.
- Sucesiones acotadas. Relación entre convergencia y acotabilidad.
- Propiedades de las sucesiones convergentes. Operaciones con los límites. Propiedades de las sucesiones infinitesimales.
- Indeterminaciones. Cálculo de límites.

**1.2 El conjunto de los números reales. Introducción axiomática de  $\mathbb{R}$ .****Segundo subsistema de clases**

- Sucesiones monótonas. El número  $e$ . Relación entre convergencia y acotabilidad. Axioma del principio de continuidad.
- Principio de intervalos encajados y representación decimal de un número real.

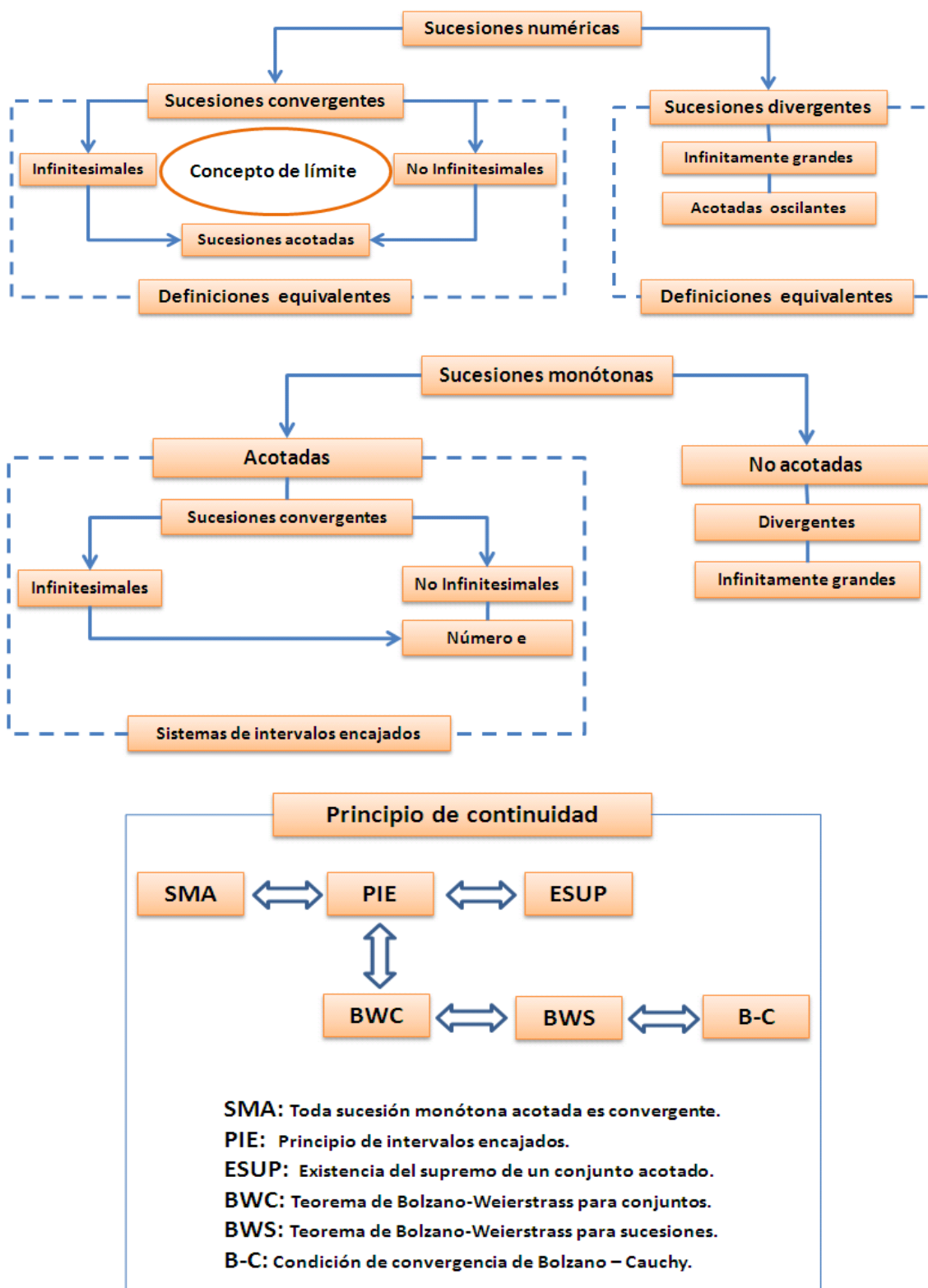
**1.3 Propiedades de los conjuntos acotados y sucesiones de números reales.****Tercer subsistema de clases**

- Definición de conjuntos acotados. Supremo e Ínfimo de un conjunto numérico.
- Punto de acumulación y subsucesiones .Teorema Bolzano-Weierstrass para conjuntos. Teorema Bolzano-Weierstrass para sucesiones. Condición de Bolzano-Cauchy para la convergencia de sucesiones.
- Nociones sobre la introducción axiomática en  $\mathbb{R}$ . Cardinalidad de  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{R}$ .

Tabla 15.2: Estructura de la Unidad didáctica: Sucesiones numéricas

U-didáctica	Conferencias	Clases Prácticas	Clases Prácticas (laboratorio)	Seminario	Preguntas escritas	Total h/c
U-1	5	11	1	1	5	36

Figura 15.1: Mapa conceptual de la Unidad: Sucesiones numéricas



## UNIDAD DIDÁCTICA II: SERIES NUMÉRICAS

### SISTEMA DE CONOCIMIENTOS

#### Cuarto subsistema de clases

Concepto de serie numérica. Series numéricas infinitas. Condición necesaria para la convergencia de una serie. Propiedades de las series de términos positivos. Criterios de comparación. Criterios del cociente y de la raíz.

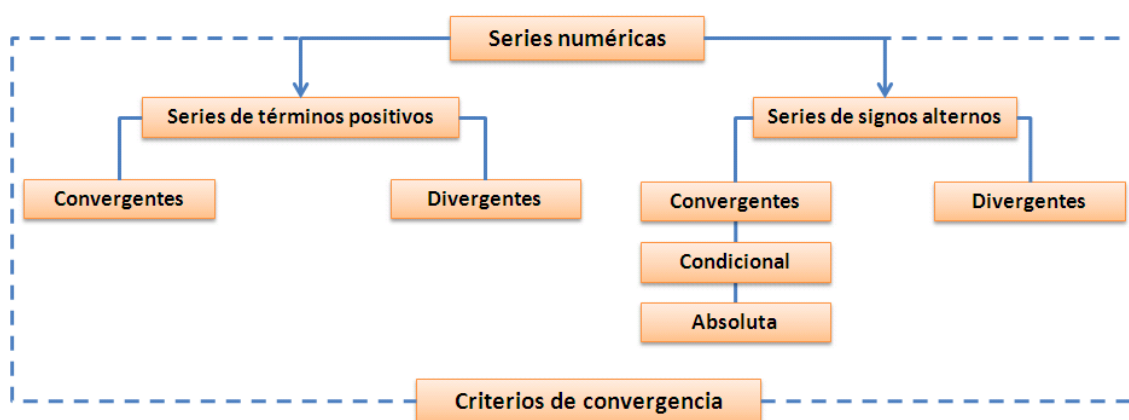
#### Quinto subsistema de clases

Series de signos alternos. Convergencia condicional y absoluta. Series de términos con signo arbitrario. Problemas de aplicación.

Tabla 15.3: Estructura de la Unidad didáctica: Series numéricas

U- didáctica	Conferencias	Clases Prácticas	Clases Prácticas (laboratorio)	TCP	Preguntas escritas	Total h/c
U-2	4	12	1	1	4	36

Figura 15.2: Mapa conceptual de la Unidad: Series numéricas



## UNIDAD DIDÁCTICA III: LÍMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

### SISTEMA DE CONOCIMIENTOS

#### Sexto subsistema de clases

Aproximar una variable a un número y aproximar los valores funcionales a un valor. Concepto y definiciones de límite de una función en un punto. Caracterizaciones. Interpretación geométrica. Operaciones. Límites laterales. Límite al infinito y en el infinito. Límite fundamental trigonométrico y algebraico. Orden entre infinitos e infinitesimales.

### Séptimo subsistema de clases

Función continua en un punto, concepto y definiciones. Caracterizaciones. Interpretación geométrica. Operaciones. Tipos de discontinuidades. Continuidad lateral. Análisis de continuidad de funciones.

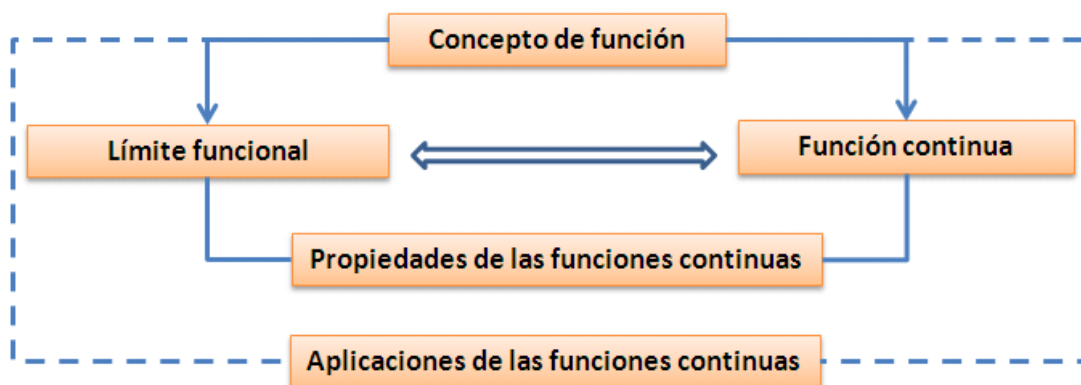
### Octavo subsistema de clases

Propiedades locales de las funciones continuas. Propiedades de las funciones continuas en un intervalo. Continuidad de la función inversa. Primer y segundo teorema de Bolzano. Teorema de acotación de Weierstrass.

Tabla 15.4: Estructura de la Unidad didáctica: Límite y continuidad de funciones reales de variable real

U- didáctica	Conferencias	Clases Prácticas	Clases Prácticas (laboratorio)	Seminario	Preguntas escritas	Total h/c
U-3	7	12	2	1	6	44

Figura 15.3: Mapa conceptual de la Unidad didáctica: Límite y continuidad de funciones reales de variable real



## **Anexo 16: Talleres científicos-metodológicos. Resultados**

Acciones de la etapa 1 de la estrategia metodológica

**16.1** (*Acción 1.3*) *Desarrollo del taller científico-metodológico: El desarrollo del PMA. Consideraciones teóricas y prácticas.*

Los objetivos de esta acción son:

1. Explicar las relaciones entre núcleos conceptuales y funciones del PMA como generador de nuevas relaciones, configuraciones y conexiones lógicas entre dichos núcleos, fundamentado en la teoría de las representaciones semióticas y el modelo cognitivo APOE.
2. Reflexionar sobre la estructura interna del método genético-constructivo y las posibles vías de implementación desde la teoría de las representaciones semióticas y el modelo cognitivo APOE, en las clases de Análisis Matemático I.

En este taller se abordan los siguientes temas:

1. Los núcleos conceptuales y las funciones del PMA.
2. El tratamiento metodológico a la coordinación entre diferentes registros de representación semiótica.
3. La importancia de las posibles formas de descomposición genética de conceptos a partir del modelo cognitivo APOE y el método genético-constructivo.

Durante el taller se debe propiciar la reflexión y debate sobre la forma en que los estudiantes asimilan los nuevos conocimientos a partir de los contenidos precedentes que estarán integrados en los núcleos conceptuales. Se ejemplifican distintos tipos de funciones de tratamiento y conversión dentro de registros de representaciones semióticas para algunos contenidos seleccionados. También se debe precisar las acciones fundamentales que deben hacer el profesor y los estudiantes para la descomposición genética de conceptos según la descripción que se hizo en el Capítulo I.

En las conclusiones, se valora el cumplimiento de los objetivos planteados, en función de solucionar el problema conceptual metodológico identificado. Además, se realiza una síntesis de los aspectos esenciales abordados que pueden aportar a la estrategia metodológica, teniendo en cuenta los elementos positivos surgidos durante el debate.

### *Resultados del primer taller metodológico*

Durante el taller se reflexiona y debate sobre la definición de desarrollo del PMA, se presentan sus características esenciales y definiciones dadas en el Capítulo I. Teniendo en cuenta el poco conocimiento teórico que tienen los docentes sobre los modelos de la enseñanza de la Matemática, se abordan las



formas lógicas del pensamiento: razonamientos, conceptos y juicios; así como, su estructura interna según Campistrous (1993). También se presenta el estudio y clasificación del desarrollo del pensamiento lógico realizado por Mengana (2016) en su investigación.

Se realiza un profundo debate sobre los modelos didácticos actuales para la enseñanza de la Matemática, sus ventajas y desventajas. Se hace referencia a las potencialidades del PHG para el tratamiento a las situaciones típicas de la Matemática, a la utilización de los procedimientos heurísticos y estrategias metacognitivas, al modelo APOE, a la teoría de las representaciones semióticas y a la utilización de mapas conceptuales. Estos son esenciales para fundamentar el método genético-constructivo.

También se estudian las definiciones de las características esenciales del PMA dadas en el Capítulo I y cómo estas pueden relacionarse con mayor eficiencia durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos del Análisis Matemático. Además se puntualizan detalles sobre el criterio de medida para los indicadores durante la aplicación de los instrumentos de evaluación.

**16.2 (Acción 1.4): Desarrollo del taller científico-metodológico: El desarrollo del PMA. Los núcleos conceptuales. El método genético-constructivo para las clases de Análisis Matemático.**

El objetivo principal de esta acción es reflexionar sobre las características esenciales del desarrollo del PMA y la importancia del trabajo con los núcleos conceptuales para la implementación del método genético-constructivo en las clases de AM.

En este taller debe participar todo el claustro involucrado en la implementación práctica de la estrategia. Se abordan los siguientes temas:

1. Definición de desarrollo del PMA.
2. Características esenciales del desarrollo del PMA (la formalización del conocimiento, el nivel de abstracción, la representación, la definición de conceptos y la demostración). Nivel de integración de dichas características en las categorías: representación en esquemas, visualización lógica y creatividad matemática.
3. Los núcleos conceptuales (conceptos y definiciones, operaciones y funciones, y relaciones métricas). La jerarquización de conceptos y los mapas conceptuales. Elementos de los núcleos conceptuales para el desarrollo del método genético-constructivo.

En el taller metodológico se debe hacer una distinción entre la definición de PMA y el desarrollo de PMA, así como las principales características de dicho proceso y posibles vías de potenciarlo. En cada una de dichas características se precisan las acciones que deben realizar el docente y el estudiante de acuerdo con los indicadores establecidos en el epígrafe 1.5 del Capítulo I. Se debe propiciar un debate sobre las

fortalezas y debilidades de agrupar las características esenciales del PMA en las categorías: representación en esquemas, visualización lógica y creatividad matemática.

Se realiza un análisis de la importancia teórica de utilizar el modelo APOE para obtener los elementos de los núcleos conceptuales y viceversa; las potencialidades de dichos núcleos para la descomposición genética de conceptos y su importancia en el desarrollo de las acciones del método genético-constructivo.

En las conclusiones se debe precisar y sistematizar ideas generales del desarrollo del PMA, teniendo en cuenta:

- Cómo dar tratamiento metodológico a las características esenciales del PMA desde las clases de Análisis Matemático.
- Las formas de evaluación de cada una de las características esenciales de dicho proceso.

El objetivo del taller será parcialmente evaluado según el nivel de reflexión y debate de los profesores participantes, y por los aportes teóricos y prácticos que estos realicen para perfeccionar los temas trabajados en el taller.

#### *Resultados del segundo taller metodológico*

En la realización del taller se explica y reflexiona sobre las potencialidades de organizar los contenidos de AM en núcleos conceptuales para dirigir a los estudiantes en la construcción de sus conocimientos y potenciar el desarrollo de las características esenciales del PMA. Este nuevo enfoque propicia la significatividad del aprendizaje a partir de la realización de configuraciones de los conocimientos precedentes. Durante el debate, se precisan las potencialidades de la descomposición genética de conceptos para el desarrollo eficiente de las acciones del método genético-constructivo.

Se explica el nivel de abstracción como la medida en que se priorizan las cualidades esenciales que brinda cada núcleo conceptual a la construcción del nuevo concepto. Se orienta, por parte del responsable de la actividad, el proceder del profesor y los estudiantes en el proceso de selección de las cualidades y propiedades que aporta cada núcleo conceptual. Además, se socializaron las indicaciones metodológicas propuestas para las categorías representación en esquemas, visualización lógica y creatividad matemática.

## Anexo 17: Clases metodológicas (instructiva, demostrativa y abierta). Resultados

**17.1 (Acción 1.5) Desarrollo de la clase metodológica instructiva: El trabajo metodológico con los núcleos conceptuales y la coordinación de registros semióticos en las clases de Análisis Matemático.**

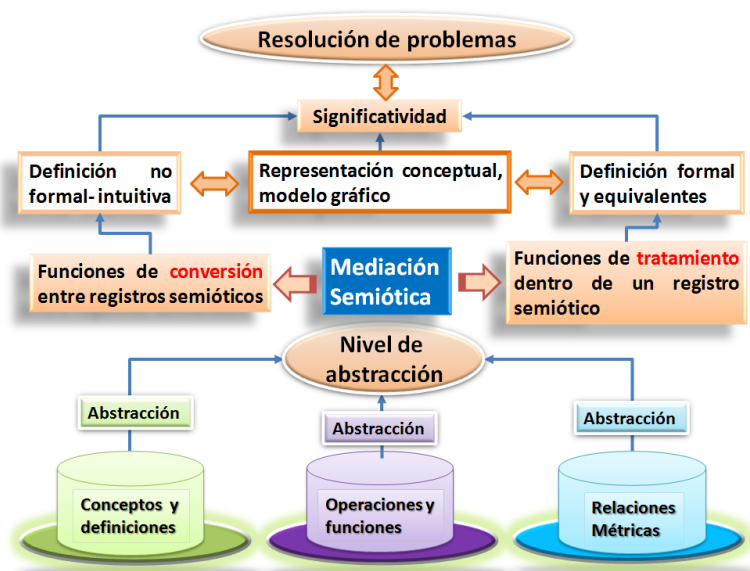
El objetivo metodológico de esta actividad es fomentar la preparación de los profesores desde el punto de vista teórico y metodológico sobre la implementación práctica del método genético-constructivo, la descomposición genética de conceptos y las funciones de tratamiento y conversión entre registros de representación semiótica, para contribuir al desarrollo del PMA.

Se deben abordar aspectos sobre:

1. La mediación semiótica en los elementos que aportan los núcleos conceptuales en la elaboración de conceptos y la resolución de problemas.
2. Desarrollo del PMA mediante configuraciones entre núcleos conceptuales.
3. Estructura interna del método genético-constructivo.

El responsable de la actividad expone el tratamiento metodológico a dichos temas, teniendo en cuenta la naturaleza de los contenidos del AM, los sustentos teóricos y los principios que sirven de fundamento al modelo didáctico.

Figura 17.1: Esquema sobre la relación entre núcleos conceptuales y la coordinación de registros semióticos



En la base de este esquema están los núcleos conceptuales, estos contienen el material genético cognitivo para la enseñanza de los contenidos matemáticos. Se destaca el nivel de abstracción como la medida en que se priorizan las cualidades esenciales que aportan los núcleos conceptuales a la construcción del

nuevo conocimiento. Se explica que antes de la formalización del conocimiento debe haber un proceso de mediación semiótica donde el profesor guíe a los estudiantes a representar nuevas relaciones o configuraciones que se realizan entre elementos de los núcleos conceptuales. Para esta mediación, primero se recomienda el trabajo con las funciones de conversión entre registros semióticos para buscar que el estudiante adquiera el mismo significado con diferentes representantes, de forma que se potencie la significatividad del aprendizaje, luego se debe formalizar convencionalmente y desarrollar las funciones de tratamiento dentro de un mismo registro.

Para lograr eficiencia en el proceso descrito anteriormente, el profesor debe tener conocimiento de las acciones cognitivo-instrumentales que debe realizar un estudiante para la apropiación del nuevo contenido. Esto lo puede conocer a través del proceso de descomposición genética explicado en el Capítulo I.

#### *Resultados de la primera clase metodológica instructiva*

La clase se realiza en la semana de preparación previa al inicio del curso escolar, en el departamento de la carrera Licenciatura en Educación Matemática, en la Facultad de Educación Media de La Universidad de Pinar del Río. Participan profesores de la disciplina Análisis Matemático e invitados de otras asignaturas básicas de la carrera.

El debate principal se enfocó en el tratamiento metodológico al proceso de abstracción de cualidades esenciales que aportan los núcleos conceptuales y las posibles formas de mediación semiótica para representar los objetos matemáticos. Se analizó la importancia del tratamiento metodológico a las funciones de conversión de un registro de representación semiótico a otro. La importancia de esto radica en que a la hora de definir un concepto se puede hacer, inicialmente, en un lenguaje intuitivo no formal, luego relacionar este resultado con algún registro de representación gráfica para lograr significatividad en el aprendizaje y el tratamiento a la función de conversión se realiza una vez dada la definición formal para relacionar esta con sus equivalentes.

Durante la actividad, a partir del análisis y la reflexión, se profundiza en el fundamento teórico y metodológico para la implementación práctica del método genético-constructivo como vía para potenciar el desarrollo del PMA durante el PEA de los contenidos de la disciplina AM.

*A partir de los resultados de la preparación metodológica de los profesores, realizada en el Anexo 17 y 18, se realiza la **acción 1.6** dirigida a la elaboración y aplicación el instrumento de diagnóstico inicial que posteriormente se presentará el Anexo 18.*

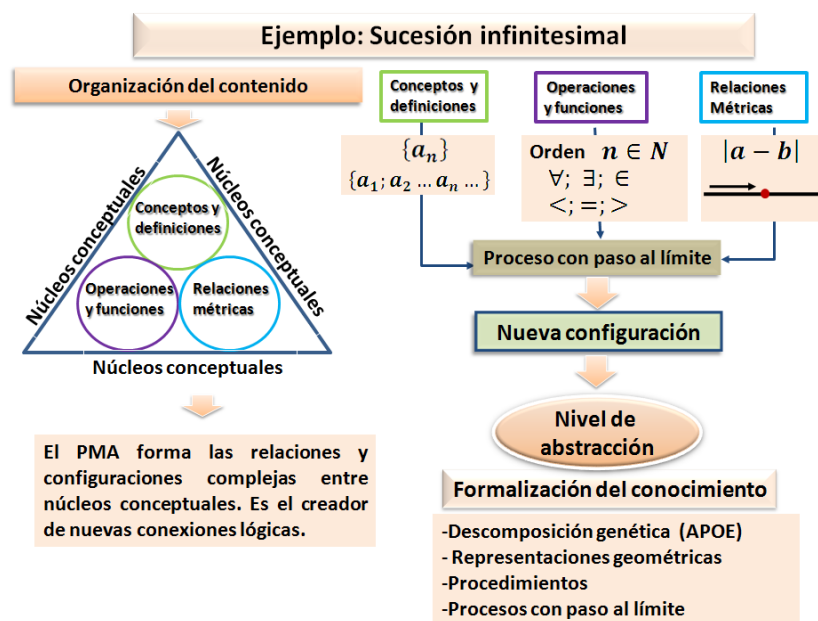
**17.2 (Acción 1.7) Desarrollo de la clase metodológica demostrativa: El trabajo metodológico con los núcleos conceptuales y la coordinación de registros semióticos en las clases de Análisis Matemático.**

El objetivo metodológico de la actividad es explicar la implementación práctica del método genético-constructivo para enseñanza aprendizaje de los contenidos del Análisis Matemático mediante el trabajo con los núcleos conceptuales y la descomposición genética de conceptos.

En el desarrollo de esta clase demostrativa se debe precisar cómo puede lograrse el objetivo metodológico en las condiciones que ofrece la clase, el tipo de contenido que se abordará, la relación del método genético-constructivo con otros métodos, los medios y la forma de evaluación de los objetivos. También debe quedar explícito el cumplimiento de los principios didácticos declarados en el modelo. Dicha clase demostrativa debe servir de ejemplo para todos los profesores y sus orientaciones deberán cumplirse por estos, lo anterior se controlará en una clase abierta de uno de los miembros del colectivo de la disciplina AM y en controles a clases a otros docentes.

Se ejemplifica con el tratamiento metodológico al concepto “sucesión infinitesimal” a partir de las acciones para el método genético-constructivo dadas en el modelo. El siguiente esquema representa parte del proceso.

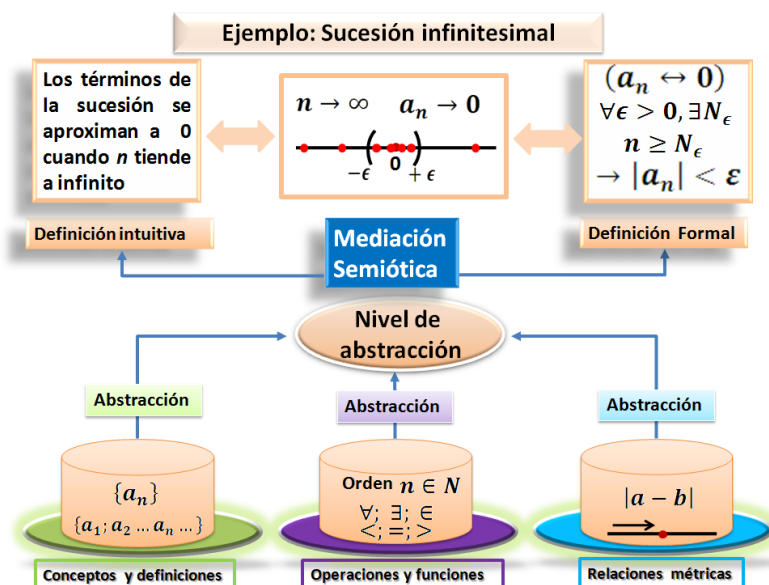
Figura 17.2: Esquema para el análisis teórico del concepto: sucesión infinitesimal



El concepto de sucesión numérica infinitesimal, se elabora a partir de configuraciones entre los núcleos conceptuales: conceptos y definiciones; operaciones y funciones; relaciones métricas. Dentro del primer núcleo está la ley de formación, el conjunto de valores; dentro del segundo, las relaciones, el orden, la igualdad, desigualdades y comparación; dentro del tercero está las nociones de medida, la distancia. En este ejemplo, el estudiante que ya tiene conocimientos básicos sobre estos términos, y aunque nunca haya escuchado “sucesión infinitesimal”, tiene dentro de sí todo el material genético cognoscitivo para que el profesor facilite una nueva configuración a través de nuevas relaciones entre dichos núcleos, y a estas

nuevas relaciones con ciertas características, condiciones y exigencias propias se le llamará “sucesión infinitesimal”

Figura 17.3: Esquema sobre la elaboración del concepto: sucesión infinitesimal



En este ejemplo, el nivel de abstracción está dado por la medida en que se priorizan las cualidades esenciales: en el primer núcleo los conceptos de sucesión, término de una sucesión, conjunto de valores; en el segundo las nociones de los cuantificadores lógicos, significado de desigualdad; y en el tercero la noción de distancia y proximidad. Una vez abstraídas estas cualidades esenciales, se inicia un proceso de mediación semiótica para las nuevas configuraciones y representaciones, esta puede comenzar con posibles definiciones equivalentes no formales, ilustraciones gráficas, etc. de forma que el estudiante asocie significados a la nueva configuración que se realizará. Luego, se ofrece una definición formal y mediante funciones de tratamiento y conversión, esta se estudia desde distintas perspectivas.

**17.3 (Acción 1.8) Desarrollo de la clase abierta: Potencialidades de la descomposición genética de conceptos para la significatividad de los contenidos y el desarrollo del PMA desde las clases de AM.**

El objetivo metodológico de la actividad es demostrar en la práctica, la implementación del método genético-constructivo a partir de la descomposición genética de conceptos, para potenciar el desarrollo del PMA desde la clase de AM. Además, el objetivo de la clase es analizar la convergencia de series numéricas mediante la condición de Cauchy y el empleo del método genético-constructivo para contribuir al desarrollo del PMA de los estudiantes.

La condición de Cauchy tiene gran importancia teórica, ya que de ella derivan algunas propiedades y criterios que permiten el análisis de convergencia de series numéricas de un modo más racional y muchas veces el estudiante utiliza estos resultados mecánicamente ignorando su significado teórico. Por ejemplo,

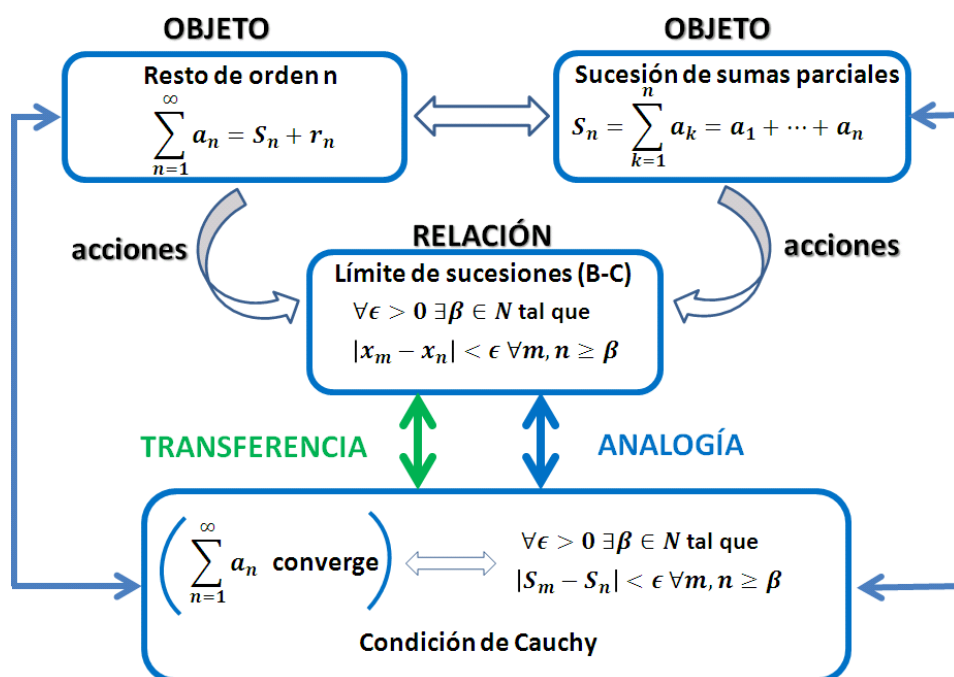
la condición necesaria de convergencia plantea: “Si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es convergente, entonces la sucesión  $\{a_n\}$  es infinitesimal” (Sánchez, 1982, p.154), por lo tanto la condición de que  $\{a_n\}$  sea infinitesimal es necesaria para que la serie sea convergente, algunos libros lo llaman criterio del término  $n$ -ésimo. Ahora bien, ¿cuál es el antecedente de este resultado?, ¿qué relación guarda con la definición de límite ya estudiada? Bueno, precisamente la génesis de esta propiedad es la condición de Cauchy, veamos entonces parte de una descomposición genética desde la teoría APOE.

La condición de Cauchy plantea lo siguiente: La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es convergente si y solo si para todo  $\epsilon > 0$ , existe un número natural  $N$ , tal que si,  $n > N$ , entonces se cumple  $|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \epsilon$  para todo  $p \in \mathbb{N}$ . (Sánchez, 1982, p.154). Para lograr un análisis teórico de conceptos, primero se debe observar que hay tres conceptos fundamentales en esta condición: concepto de sucesión de sumas parciales ( $a_{n+1} + \dots + a_{n+p}$ , por lo general al estudiante le cuesta mucho trabajo ubicar esta expresión suma dentro del registro semiótico “sucesión” de la forma  $\{r_n\}$ ); concepto límite (expresado en la definición de  $\epsilon$ ) y el concepto resto de orden  $n$  (en este caso la sucesión  $\{r_n\}$ ). Por tanto, la asimilación de la condición de Cauchy, reposa sobre la comprensión de estos conceptos ya estudiados. La idea es buscar la forma de que el estudiante los manipule adecuadamente mediante representaciones mentales.

Lo primero que debe hacerse es enseñarle al estudiante que para cada  $n \in \mathbb{N}$  se obtiene un resto  $\{r_n\}$  que es una sucesión de tal forma que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_n + r_n$  de donde se deduce que  $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} + \dots$  teniendo en cuenta que los restos de cualquier orden de una serie tienen el mismo carácter, convergen o divergen. En este caso, se están realizando acciones de conversión entre registros de representación semiótica, esto contribuye a que el estudiante visualice una suma como una sucesión. Por tanto, como consecuencia directa se puede decir que “Si  $\lim r_n = 0$  entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es convergente” este es un resultado teórico muy importante que permite comprender la esencia del criterio de Cauchy.

Algo que se puede observar es que el esquema final que refiere el modelo cognitivo APOE, se va formando desde el principio, en este caso se debe trabajar sobre el concepto “límite de una sucesión”. Ya los estudiantes estudiaron el criterio de convergencia de Bolzano-Cauchy para sucesiones, o sea, para que  $\{x_n\}$  sea convergente es necesario y suficiente que para todo  $\epsilon > 0$  exista un número natural  $\beta$ , tal que la desigualdad  $|x_n - x_m| < \epsilon$  sea válida siempre que  $n \geq \beta$  y  $m \geq \beta$ . Como es evidente la esencia del criterio es que los términos de la sucesión se acerquen unos a otros a medida que su índice crece. Aquí es donde juegan un papel importante los procesos cognitivos del pensamiento “analogía y transferencia” vistos como procesos.

Figura 17.4: Esquema sobre la descomposición genética de la condición de Cauchy



Una vez concluida la clase abierta, se discutirá por todos los participantes. El que la dirige, resumirá la discusión, señalando los principales logros y deficiencias observadas en la clase y emitirá las recomendaciones que correspondan, para mejorar la preparación del profesor en su trabajo docente.



## Anexo 18: Prueba pedagógica inicial antes de comenzar el pre-experimento

**Objetivo:** diagnosticar el estado inicial del desarrollo del PMA, de los estudiantes que comenzarán el estudio de la asignatura Análisis Matemático I.

**Orientación:** El profesor interactúa con los estudiantes para que estos argumenten y dejen por escrito sus ideas, según las cualidades del PMA que se necesite observar durante el desarrollo de la actividad; el evaluador debe lograr que los estudiantes exterioricen la forma en que piensan las siguientes actividades.

### Cuestionario

1. Inicialmente el profesor presentará a los estudiantes la expresión K: Si  $2a < b$  entonces  $2ax < bx$  para  $x < 0$ , y preguntará ¿las exigencias son suficientes para determinar un valor de verdad para la expresión K? ¿Por qué?

Luego el profesor presenta  $2a < b$  y pregunta ¿es verdadero o es falso?, ¿por qué?; después presenta  $2ax < bx$ , para  $x < 0$  y realiza las mismas preguntas anteriores.

Posteriormente el profesor presenta la expresión Q: Si  $2ax < bx$  entonces  $2a < b$  para  $x < 0$ ; y preguntará a los estudiantes, ¿es una proposición?, los que digan que No, el profesor pedirá que argumenten y los que digan que Si o no saben responder, el profesor pedirá determinar un valor de verdad para Q.

2. El profesor propone la expresión  $X = \frac{2a+b}{2a}$ , ( $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ) y luego plantea: Demuestra que para el dominio indicado,  $X = 1 + \frac{b}{a}$ ; una vez que el estudiante haya realizado la tarea, indicará: de ser posible, encuentre otra vía de demostración.

Posteriormente el profesor plantea los valores particulares  $a = 2$ ;  $b = 4$  y comprueba en ambas expresiones que  $X = 3$ , luego preguntará ¿lo anterior demuestra que  $X = 1 + \frac{b}{a}$ ? Argumente.

3. Si  $k$  es un número real, la expresión  $|k| \leq 2$  significa:

a) ☐  $k \leq 2$

b) ☐

c) ☐

4. Utilice un modelo gráfico o esquema para identificar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

En cada caso deja por escrito el modelo de análisis.

a) ☐ Las  $\frac{3}{7}$  de  $a$  es 21 entonces los  $\frac{4}{7}$  de  $a$  es 42.

b) ☐  $A \subset B$  y  $x \notin A$  entonces  $x \notin A \setminus B$ .

c) ☐  $x \notin A \cap B$ , entonces  $x \in A \setminus B$  o  $x \in B \setminus A$ .

d) ☐ Toda función estrictamente monótona es inyectiva.

5. Sea la función  $f: A \rightarrow B$ , defina el concepto: cero de la función  $f$ .
- 5.1 Sea la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(t) = 4 - t^2$ . Identifique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones.
- a) ☐ La función  $f$  tiene dos ceros.
  - b) ☐  $y = 0$  es imagen de al menos un  $t \in \text{Dom}f$ .
  - c) ☐ Existen dos valores reales para los cuales  $f(t) = 0$ .
  - d) ☐  $f(-2) = f(2)$ .
  - e) ☐ La ecuación  $-4 = -t^2$  tiene dos soluciones reales.
  - f) ☐ El gráfico de la función corta al eje de las abscisas en dos puntos.
  - g) ☐ Los puntos  $P[-2; 0]$  y  $Q[2; f(2)]$  pertenecen al gráfico de  $f$ .
- 5.2 Identifica cuales de las afirmaciones anteriores son equivalentes. De las que consideres como no equivalentes, argumenta por qué no lo son.
6. Sea la sucesión de números  $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8} \dots$
- a) Escribe los próximos cinco términos.
  - b) ¿A qué número se aproxima la sucesión? Fundamenta.
7. En cada proposición indique el valor de verdad. Argumenta en cada caso.
- a) ☐ Todo número real es irracional o racional.
  - b) ☐ Todo número real es irracional y racional.
  - c) ☐ Todo número irracional o racional es real
- 7.1 En dichas proposiciones intervienen los conceptos: número real  $R$ , número racional  $Q$  y número irracional  $I$ . Indica un orden jerárquico para dichos conceptos, representa tu elección mediante un diagrama de inclusión e identifica las propiedades que producen la superioridad de un concepto respecto al otro.
8. La siguiente proposición es falsa: "La ecuación  $x^2 - 2 = 0$  tiene solución racional". Selecciona las posibles justificaciones correctas.
- a) ☐ Es falso porque no tiene soluciones racionales.
  - b) ☐ Es falso porque tiene soluciones reales.
  - c) ☐ Es falso porque tiene soluciones irracionales.
  - d) ☐ Es falso porque las soluciones son  $x_1 = \sqrt{2}$  y  $x_2 = -\sqrt{2}$ .
9. Determine si cada proposición siguiente es verdadera o falsa.
- a) ☐  $5 < 9$  y  $9 < 7$ .
  - b) ☐ No es cierto que  $(5 < 9 \text{ y } 9 < 7)$ .
  - c) ☐  $5 < 9$  o no es cierto que  $(5 < 9 \text{ y } 9 < 7)$ .

d) \_\_\_\_ Si 4 es múltiplo de 8 entonces 12 es divisible entre 3.

e) \_\_\_\_ Si  $a$  es par entonces  $a^2$  es par.

f) \_\_\_\_  $a^2$  es par si y solo si  $a$  es par

9.1 Escriba la proposición recíproca de los incisos d), e) y f). Analiza, en cada caso si la negación de esta es verdadera.

9.2 Demuestre que la proposición del inciso e) es verdadera.

Tabla 18.1: Presencia de los indicadores de la dimensión 2 en la PPI

Ind.	Actividades
1	1.; 7.; 7.1; 9; 9.1
2	1.; 5.2; 6. b); 7.; 9.2
3	5.; 7.1;
4	3.; 7.; 4. b), c); 5.1;
5	7.; 7.1; 9.1; 9.2
6	2.; 3.; 5.1
7	3.; 4.; 7.1; 6.
8	3.; 4.; 5.2; 6. b); 7.1
9	2.; 8.; 9.; 9.1; 9.2
10	2.; 9.2

**Nota:** Esta organización no es la única para visualizar la presencia de indicadores, pueden existir otras actividades dentro de la prueba pedagógica interactiva en la que se presencie mejor un determinado indicador, en dependencia de la respuesta del estudiante. Además, en la evaluación se deben seguir los criterios de observación de los indicadores dados en el epígrafe 1.5 y el criterio de medida del Anexo 6.

Tabla 18.2: Resultados de la PPI alcanzado por los estudiantes en cada indicador durante el CD 17-18

		Indicadores									
Estudiantes		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	PA	A	PA	PA	A	IA	IA	IA	PA	IA
	2	A	A	PA	PA	BA	PA	PA	PA	IA	IA
	3	IA	IA	IA	IA	IA	IA	PA	IA	IA	IA
	4	PA	IA	PA	A	BA	IA	IA	IA	PA	IA
	5	BA	A	A	A	BA	PA	A	PA	A	PA
	6	IA	A	IA	IA	PA	IA	IA	IA	IA	IA
	7	A	PA	IA	IA	PA	IA	IA	IA	IA	IA
	8	MA	BA	A	BA	MA	BA	A	A	PA	A
	9	IA	IA	PA	IA	IA	IA	PA	IA	IA	IA
	10	PA	IA	IA	IA	PA	IA	IA	IA	PA	IA

Tabla 18.3: Resultados de la PPI alcanzado por los estudiantes en cada indicador durante el CD 17-18

		Indicadores									
Estudiantes		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	IA	IA	IA	IA	A	IA	PA	IA	IA	IA
	2	PA	PA	PA	IA	A	PA	A	PA	PA	PA
	3	IA	IA	IA	IA	IA	IA	PA	IA	IA	IA
	4	PA	IA	IA	IA	A	IA	IA	IA	IA	IA

Tabla 18.4: Resultados de la PPI alcanzado por los estudiantes en cada indicador durante el CD 19-20

		Indicadores									
Estudiantes		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	IA	IA	PA	IA	A	PA	IA	PA	IA	IA
	2	PA	IA	PA	PA	A	IA	PA	PA	IA	IA
	3	IA	PA	IA	IA	PA	IA	IA	IA	IA	IA
	4	IA	IA	PA	PA	A	A	IA	IA	A	IA
	5	A	A	A	PA	BA	A	A	PA	A	A
	6	IA	IA	IA	IA	A	IA	IA	IA	IA	IA
	7	PA	A	IA	IA	PA	PA	IA	PA	IA	IA
	8	PA	IA	A	IA	A	PA	IA	IA	IA	IA

## Anexo 19. Guía de observación a clases. Resultados

**Objetivo:** evaluar las características esenciales del PMA, la implementación del método genético-constructivo y las potencialidades de dicho método para contribuir al desarrollo del PMA en los estudiantes.

**Nota:** Para la medición y evaluación de los indicadores se tienen en cuenta la descripción del epígrafe 1.5; las acciones del MG-C del epígrafe 2.4.1 y los criterios del Anexo 6.

Tabla 19.1: Guía de observaciones a clases

<b>Dimensión 2: Actividad cognitiva de los estudiantes relacionada con las características esenciales del PMA.</b>		<b>Evaluación</b>				
<b>Indicadores</b>		<b>MA</b>	<b>BA</b>	<b>A</b>	<b>PA</b>	<b>IA</b>
1	Determinación de características esenciales en los análisis que se realizan durante el desarrollo de actividades matemáticas.					
2	Coherencia en las argumentaciones.					
3	Significatividad en la relación concepto-definición.					
4	Utilización correcta de definiciones.					
5	Conversión del lenguaje común al lenguaje técnico de la matemática.					
6	Identificación de un mismo concepto en formalizaciones diferentes.					
7	Utilización de esquemas gráficos de apoyo a la racionalización del trabajo mental.					
8	Representación de un concepto en diferentes registros semióticos.					
9	Logicidad en la búsqueda de la demostración.					
10	Formalización en la representación de la demostración.					
<b>Acciones del método genético-constructivo</b>						
11	Identificación de los núcleos conceptuales del conocimiento sobre los cuales se realizarán las configuraciones necesarias, según el objetivo de la actividad matemática					
12	Identificación de los componentes y propiedades que aporta cada núcleo conceptual al conocimiento matemático.					
13	Análisis de los componentes que aporta cada núcleo conceptual para abstraer lo esencial y luego sintetizar en un todo.					
14	Establecimiento de nuevas configuraciones y conexiones entre los componentes de los núcleos conceptuales en función del objetivo de la actividad.					
15	Formalización de los conocimientos que surgen de las configuraciones entre los núcleos conceptuales, primero en un lenguaje personalizado y luego en la terminología convencional.					
16	Ejemplificación, en distintos registros de representación semiótica, de las configuraciones realizadas entre los núcleos conceptuales.					
17	Formulación y resolución de problemas que propicien nuevas configuraciones entre los núcleos conceptuales, a diferentes niveles de asimilación.					
18	Visualización, mediante mapas conceptuales, de la posición, función y relación del nuevo concepto aprendido, con los conceptos de los núcleos conceptuales que le dieron origen.					



Tabla 19.3: Resumen de los resultados de las observaciones a clases de la Tabla 19.2

		Dimensión 2															
		Características PMA								Método G-C							
		MA	BA	A	PA	I	Id.	Ev		MA	BA	A	PA	I	Id.	Ev	
Actividades docentes	Conferencias	1	0	1	4	4	1	0,50	PA	0	0	3	5	0	0,46	PA	
		2	0	7	3	0	0	0,74	BA	0	1	7	0	0	0,63	A	
		3	1	7	1	1	0	0,76	BA	0	1	7	0	0	0,63	A	
		4	0	6	3	1	0	0,70	A	0	5	3	0	0	0,73	BA	
		5	1	5	4	0	0	0,74	BA	1	4	3	0	0	0,75	BA	
		6	2	7	1	0	0	0,82	BA	0	7	1	0	0	0,78	BA	
		7	1	8	1	0	0	0,80	BA	3	5	0	0	0	0,88	MA	
		8	2	8	0	0	0	0,84	BA	3	5	0	0	0	0,88	MA	
		9	7	2	1	0	0	0,92	MA	4	4	0	0	0	0,9	MA	
		10	6	4	0	0	0	0,92	MA	5	3	0	0	0	0,93	MA	
	Clases P	11	0	2	2	6	0	0,52	PA	0	0	5	3	0	0,53	PA	
		12	0	2	7	1	0	0,62	A	0	3	5	0	0	0,68	A	
		13	0	9	1	0	0	0,78	BA	0	8	0	0	0	0,80	BA	
		14	1	8	1	0	0	0,80	BA	0	7	1	0	0	0,78	BA	
		15	3	6	1	0	0	0,84	BA	1	7	0	0	0	0,83	BA	
		16	4	6	0	0	0	0,88	MA	3	5	0	0	0	0,88	MA	
	Consulta	17	0	6	2	2	0	0,68	A	0	2	6	0	0	0,65	A	
		18	0	4	6	0	0	0,68	A	0	5	3	0	0	0,73	BA	
		19	2	7	1	0	0	0,82	BA	1	6	1	0	0	0,80	BA	
		20	2	8	0	0	0	0,84	BA	3	5	0	0	0	0,88	MA	

Tabla 19.4: Relación entre el desarrollo del PMA alcanzado por los estudiantes (dimensión 2) y la utilización del M G-C (según los resultados de la Tabla 19.3)

Act.	PMA	M G-C	PMA	M G-C	Sig.
1	PA	PA	2	2	0
2	BA	A	4	3	1
3	BA	A	4	3	1
4	A	BA	3	4	-1
5	BA	BA	4	4	0
6	BA	BA	4	4	0
7	BA	MA	4	5	-1
8	BA	MA	4	5	-1
9	MA	MA	5	5	0
10	MA	MA	5	5	0
11	PA	PA	2	2	0
12	A	A	3	3	0
13	BA	BA	4	4	0
14	BA	BA	4	4	0
15	BA	BA	4	4	0
16	MA	MA	5	5	0
17	A	A	3	3	0
18	A	BA	3	4	-1
19	BA	BA	4	4	0
20	BA	MA	4	5	-1

-1	0	1	
5	13	2	Actividades docentes
25%	65%	10%	
75%			Favorable

## Anexo 20: Registros de evaluaciones de la dimensión 2 en los sub-sistemas de clases. Resultados

**Objetivo:** evaluar el desarrollo del PMA en cada subsistema de clases.

Nota: La Tabla 20.1 es el modelo que utiliza el profesor para evaluar los indicadores de la dimensión 1 en cada subsistema de clases. La síntesis de los resultados, por indicadores, aparece en la Tabla 20.2.

Tabla: 20.1 Registro de evaluaciones en cada subsistema de clases

Registro de evaluaciones												
Subsistema de clase: _____												
Estudiantes												
Indicadores	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$I_d$	Ev
	1											
	2											
	3											
	4											
	5											
	6											
	7											
	8											
	9											
	10											
Índice de la dimensión 2												
MA BA A PA I												

Tabla 20.2: Resumen de los resultados por indicadores de la dimensión 2 en cada subsistema de clases.

(Curso diurno 17-18)

dimensión 2								
Subsistemas		MA	BA	A	PA	IA	$I_d$	Ev
	1	0	3	3	2	2	0,54	PA
	2	1	2	3	2	2	0,56	A
	3	1	2	4	2	1	0,60	A
	4	1	3	3	2	1	0,62	A
	5	1	3	4	1	1	0,64	A
	6	2	3	3	1	1	0,68	A
	7	2	3	4	1	0	0,72	BA
	8	2	4	3	1	0	0,74	BA
Índice de la dimensión 2								
	1	4	2	1	0		<b>0,73</b>	<b>BA</b>



## Anexo 21. Prueba pedagógica final

**Objetivo:** diagnosticar el nivel de desarrollo alcanzado por los estudiantes en las características esenciales del PMA.

**Orientación:** El profesor interactúa con los estudiantes para que estos argumenten, expliquen y dejen por escrito sus ideas según las cualidades del PMA que se necesite observar durante el desarrollo de la actividad; el profesor debe lograr que los estudiantes exterioricen la forma en que piensan las siguientes actividades.

### Cuestionario

1. Diga verdadero o falso. Ejemplifica en cada caso.
  - a) ☐ Dada la sucesión  $K_n$ , si  $K_p < K_q$  para todo  $p > q$  entonces  $K_n$  es decreciente.
  - b) ☐ Sea la sucesión  $B_n = 2n$ , entonces para todo  $k \in \mathbb{R}$  existe un número  $p \in \mathbb{N}$  tal que para  $n \geq p$  se cumple que  $B_n \geq k$ .
2. Dada la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(t) = 2t^3$ . Encuentre al menos dos vías para verificar cada una de las siguientes afirmaciones.
  - a)  $f$  es creciente en todo su dominio.
  - b)  $f$  no es par
3. Sea la sucesión  $\{X_n\}$  y  $l \in \mathbb{R}$ . Defina el concepto de convergencia de  $\{X_n\}$  a  $l$ .
  - 3.1 Marca con una X la afirmación que es correcta. Sea sucesión  $\{X_n\}$  con límite  $l = 1$ , entonces la relación  $|X_n - 1| < \epsilon = 10^{-3}$  significa:
    - a) ☐ La sucesión es convergente y lo hace a  $\epsilon = 10^{-3}$ .
    - b) ☐ Casi todos los términos de  $X_n$  se encuentran en una vecindad de 1 de radio  $\epsilon = 10^{-3}$ .
    - c) ☐ Se puede determinar un número  $k \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq k$  entonces  $|X_n - 1| < 10^{-3}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

3.2 Identifica cuál de las siguientes representaciones gráficas ilustra la relación:

- a)
- b)
- c)

4. A través de un análisis gráfico responde verdadero o falso. Argumenta en cada caso y deja por escrito el razonamiento gráfico.
  - a) El conjunto solución de la inecuación  $2^x \geq -x^2$  es  $S = \emptyset$ .
  - b) Si  $A = \{x \in \mathbb{R}: |x| > 5\}$  entonces  $-2 \in A$ .
  - c) Si  $f(x) = \frac{2}{x}$  definida para  $x \in [-1; 1] \setminus \{0\}$  entonces  $f(x)$  es discontinua.
  - d) Sea la función  $w: \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$ , entonces  $w$  interseca al eje de las abscisas en al menos un punto.
5. Sea la serie de términos positivos  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_n + \dots$ . Identifique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones.
  - a) ☐ Si la suma existe y es finita entonces la serie es convergente.
  - b) ☐ Si la serie es convergente entonces la suma es finita.
  - c) ☐ La serie es convergente si y solo si existe  $\lim \sum_1^\infty a_n = S$  ( $S \in \mathbb{R}$ ).
- 5.1 Identifique cuales de estas afirmaciones son equivalentes. Argumente la que identifique como no equivalente.
6. Sea la sucesión  $a_1; a_1 \cdot q; a_1 \cdot q^2; a_1 \cdot q^3 \dots$  siendo  $a_1 = 7$  y  $q = 0,1$ .
  - a) Escribe los cinco primeros términos.
  - b) El último término es: \_\_\_\_\_. Fundamenta.
  - c) Expresa  $0, \bar{7}$  como un cociente de dos enteros.
7. En cada proposición indique el valor de verdad. Argumente en cada caso.
  - a) ☐ Toda sucesión acotada es convergente.
  - b) ☐ Toda sucesión convergente es acotada.
  - c) ☐ Si las sucesiones  $X_{2n}$  y  $X_{2n-1}$  convergen entonces  $X_n$  es convergente.
- 7.1 Escribe la proposición recíproca de cada inciso y analiza, en cada caso si la negación de esta es verdadera.
- 7.2 En dichas proposiciones intervienen los conceptos: sucesión convergente ( $S_c$ ) y sucesión acotada ( $S_a$ ). Identifica el orden de subordinación de estos conceptos y apoya tu elección mediante un diagrama de inclusión.
- 7.2.1 Identifica las propiedades que producen la superioridad de un concepto respecto al otro.
8. Dada la siguiente función  $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que
 
$$w(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
  - 8.1 Representa gráficamente la función  $w$ .
  - 8.2 Demuestra aplicando la definición  $\epsilon - \delta$  que  $\lim_{x \rightarrow 1} w(x) = 1$ .

8.3 Demuestra aplicando la definición por sucesiones, que  $w(x)$  es discontinua en  $x_0 = 0$ .

Tabla 21.1: Presencia de los indicadores de la dimensión 2 en la PPF

Ind.	Actividades
1	1.; 2.; 3.2; 5.; 7.; 7.2; 8.2; 8.3
2	4.; 6. b); 7.; 8.2; 8.3
3	1.; 3.; 3.1; 5.; 8.2; 8.3
4	1.; 3.; 8.2; 8.3
5	1.; 7.1; 7.2; 8.2; 8.3
6	1. b); 3.2; 5.; 5.1
7	3.2; 4.; 7.2; 8.1
8	2.; 3.1; 3.2; 4.; 8.1; 8.2; 8.3
9	1.; 2; 4.; 7.1; 8.2; 8.3
10	1. b); 8.1; 8.3

**Nota:** Esta organización no es la única para visualizar la presencia de indicadores, pueden existir otras actividades dentro de la prueba pedagógica en las que se presencie mejor un determinado indicador en dependencia de la respuesta del estudiante. Además, en la evaluación se deben seguir los criterios de observación de los indicadores dados en el epígrafe 1.5 y el criterio de medida del Anexo 6.

Tabla 21.2: Resultados de la PPF alcanzados por los estudiantes en cada indicador de la dimensión 2 durante el CD 17-18

		Indicadores									
Estudiantes		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	A	MA	BA	A	A	A	BA	A	BA	BA
	2	BA	MA	BA	BA	BA	BA	BA	BA	BA	BA
	3	PA	A	BA	PA	BA	A	A	A	IA	PA
	4	A	A	BA	BA	A	A	BA	BA	BA	BA
	5	BA	BA	MA	MA	BA	BA	MA	MA	MA	BA
	6	A	A	A	A	A	A	BA	A	A	A
	7	A	MA	BA	MA	BA	BA	MA	BA	MA	BA
	8	MA	MA	MA	MA	MA	BA	MA	MA	MA	MA
	9	PA	A	BA	A	A	IA	A	A	A	A
	10	A	PA	BA	A	A	PA	A	BA	A	A

Tabla 21.3: Resultados de la PPF alcanzados por los estudiantes en cada indicador durante el CPE 17-18

		Indicadores									
Estudiantes		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	A	A	BA	A	BA	A	BA	A	A	A
	2	BA	BA	BA	BA	BA	BA	MA	BA	A	BA
	3	BA	A	BA	A	A	A	BA	A	PA	A
	4	A	A	A	IA	BA	PA	A	PA	IA	PA

Tabla 21.4: Resultados de los indicadores de la dimensión 2 durante el primer subsistema de clases del CD 19-20

Nota: Esta evaluación se realiza en el primer subsistema de clases del CD 19-20, debido a que en este período aún no se puede aplicar la PPF planificada.

		Indicadores									
Estudiantes		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	A	A	A	A	BA	PA	A	PA	PA	A
	2	BA	PA	BA	A	A	A	BA	A	A	A
	3	A	A	PA	PA	PA	PA	A	A	A	PA
	4	BA	A	A	A	BA	A	BA	BA	A	A
	5	MA	BA	BA	BA	MA	BA	MA	BA	BA	BA
	6	A	PA	A	PA	BA	A	A	PA	PA	A
	7	BA	A	BA	A	BA	BA	BA	A	PA	PA
	8	A	PA	PA	A	A	PA	A	A	IA	IA

## Anexo 22. Resumen de los resultados alcanzados en los periodos de experimentación

Tabla 22.1: Comparación de los resultados alcanzados por los estudiantes durante la PPI y la PPF (Curso diurno 17-18)

Estudiantes		PPI		PPF		Avance	Nota E.F
		Ind.	Ev.	Ind.	Ev.		
	1	0,36	IA	0,72	BA	+3	4
	2	0,42	PA	0,82	BA	+2	4
	3	0,24	IA	0,54	PA	+1	3
	4	0,40	IA	0,72	BA	+3	4
	5	0,60	A	0,90	MA	+2	5
	6	0,26	IA	0,62	A	+2	4
	7	0,28	IA	0,86	MA	+4	5
	8	0,74	BA	0,98	MA	+1	5
9	0,24	IA	0,56	A	+2	4	
10	0,26	IA	0,60	A	+2	3	

Gráfico 22.1: Evolución del desarrollo del PMA de los estudiantes durante el pre-experimento del CD 17-18

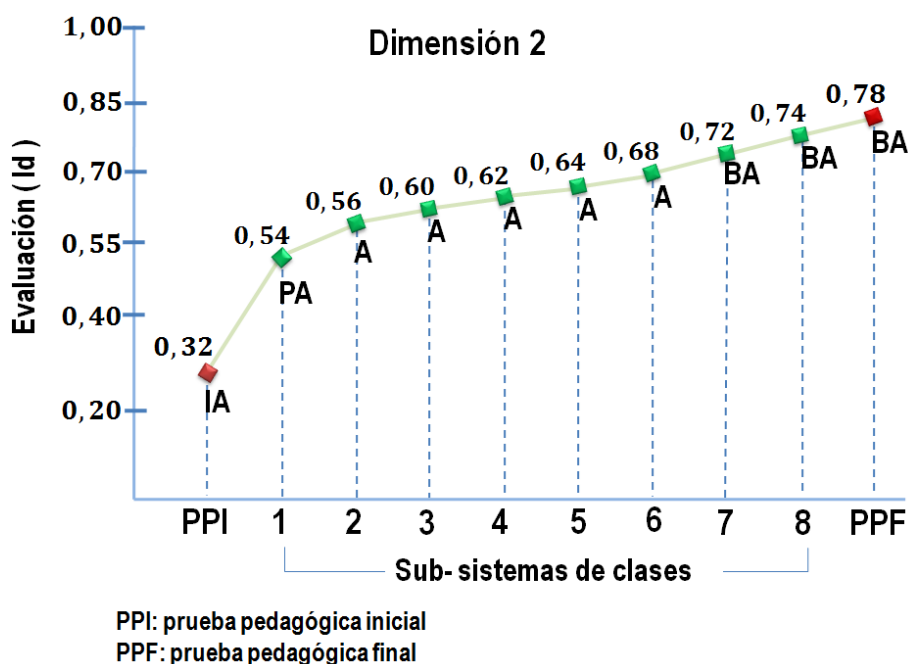


Tabla 22.2: Resultados de la PPI=X y la PPF=Y durante los periodos de experimentación

Nota: Se asignó la siguiente puntuación [muy adecuado (MA) = 5], [bastante adecuado (BA) = 4], [adecuado (A) = 3], [poco adecuado (PA) = 2], [inadecuado (IA) = 1]. En el caso de CD 19-20 las evaluaciones Y corresponden al primer subsistema de clases, según el modelo de la Tabla 20.1.

Est.	Indicadores de la dimensión 2																			
	I1		I2		I3		I4		I5		I6		I7		I8		I9		I10	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
Curso diurno 2017-2018																				
1	2	3	3	5	2	4	2	3	3	3	1	3	1	4	1	3	2	4	1	4
2	3	4	3	5	2	4	2	4	4	4	2	4	2	4	2	4	1	4	1	4
3	1	2	1	3	1	4	1	2	1	4	1	3	2	3	1	3	1	1	1	2
4	2	3	1	3	2	4	3	4	4	3	1	3	1	4	1	4	2	4	1	4
5	4	4	3	4	3	5	3	5	4	4	2	4	3	5	2	5	3	5	2	4
6	1	3	3	3	1	3	1	3	2	3	1	3	1	4	1	3	1	3	1	3
7	3	3	2	5	1	4	1	5	2	4	1	4	1	5	1	4	1	5	1	4
8	5	5	4	5	3	5	4	5	5	5	4	4	3	5	3	5	2	5	3	5
9	1	2	1	3	2	4	1	3	1	3	1	1	2	3	1	3	1	3	1	3
10	2	3	1	2	1	4	1	3	2	3	1	2	1	3	1	4	2	3	1	3
Curso por encuentro 2017-2018																				
1	1	3	1	3	1	4	1	3	3	4	1	3	2	4	1	3	1	3	1	3
2	2	4	2	4	2	4	1	4	3	4	2	4	3	5	2	4	2	3	2	4
3	1	4	1	3	1	4	1	3	1	3	1	3	2	4	1	3	1	2	1	3
4	2	3	1	3	1	3	1	1	3	4	1	2	1	3	1	2	1	1	1	2
Curso diurno 2019-2020																				
1	1	3	1	3	2	3	1	3	3	4	2	2	1	3	2	2	1	2	1	3
2	2	4	1	2	2	4	2	3	3	3	1	3	2	4	2	3	1	3	1	3
3	1	3	2	3	1	2	1	2	2	2	1	2	1	3	1	3	1	3	1	2
4	1	4	1	3	2	3	2	3	3	4	3	3	1	4	1	4	3	3	1	3
5	3	5	3	4	3	4	2	4	4	5	3	4	3	5	2	4	3	4	3	4
6	1	3	1	2	1	3	1	2	3	4	1	3	1	3	1	2	1	2	1	3
7	2	4	3	3	1	4	1	3	2	4	2	4	1	4	2	3	1	2	1	2
8	2	3	1	2	3	2	1	3	3	3	2	2	1	3	1	3	1	1	1	1

**Anexo 23: Resumen de los resultados por indicador de la PPI y la PPF. Prueba de hipótesis**

Nota: Las siglas ID1I significa indicador 1 en la PPI y ID1F significa indicador 1 de la PPF y así sucesivamente.

Tabla 23.1: Frecuencias por indicadores del total de estudiantes de los períodos de experimentación (Tabla 22.2)

	Eva.	IA	PA	A	BA	MA	Total
ID1I	Total	9	8	3	1	1	22
	% del total	40,9%	36,4%	13,6%	4,5%	4,5%	100,0%
ID1F	Total	-	2	11	7	2	22
	% del total	-	9,1%	50,0%	31,8%	9,1%	100,0%
ID2I	Total	12	3	6	1	-	22
	% del total	54,5%	13,6%	27,3%	4,5%	-	100,0%
ID2F	Total	-	4	11	3	4	22
	% del total	-	18,2%	50,0%	13,6%	18,2%	100,0%
ID3I	Total	10	8	4	-	-	22
	% del total	45,5%	36,4%	18,2%	-	-	100,0%
ID3F	Total	-	2	5	13	2	22
	% del total	-	9,1%	22,7%	59,1%	9,1%	100,0%
ID4I	Total	14	5	2	1	-	22
	% del total	63,6%	22,7%	9,1%	4,5%	-	100,0%
ID4F	Total	1	3	11	4	3	22
	% del total	4,5%	13,6%	50,0%	18,2%	13,6%	100,0%
ID5I	Total	3	5	9	4	1	22
	% del total	13,6%	22,7%	40,9%	18,2%	4,5%	100,0%
ID5F	Total	-	1	8	11	2	22
	% del total	-	4,5%	36,4%	50,0%	9,1%	100,0%
ID6I	Total	13	6	2	1	-	22
	% del total	59,1%	27,3%	9,1%	4,5%	-	100,0%
ID6F	Total	1	5	9	7	-	22
	% del total	4,5%	22,7%	40,9%	31,8%	-	100,0%
ID7I	Total	12	6	4	-	-	22
	% del total	54,5%	27,3%	18,2%	-	-	100,0%
ID7F	Total	-	-	8	9	5	22
	% del total	-	-	36,4%	40,9%	22,7%	100,0%
ID8I	Eva.	IA	PA	A	BA	MA	Total
	Total	14	7	1	-	-	22
ID8F	% del total	63,6%	31,8%	4,5%	-	-	100,0%
	Total	-	3	10	7	2	22
ID9I	% del total	-	13,6%	45,5%	31,8%	9,1%	100,0%
	Eva.	IA	PA	A	BA	MA	Total
ID9F	Total	14	5	3	-	-	22
	% del total	63,6%	22,7%	13,6%	-	-	100,0%
ID10I	Total	3	4	8	4	3	22
	% del total	13,6%	18,2%	36,4%	18,2%	13,6%	100,0%
ID10F	Eva.	IA	PA	A	BA	MA	Total
	Total	18	2	2	-	-	22
ID10F	% del total	81,8%	9,1%	9,1%	-	-	100,0%
	Total	1	4	9	7	1	22
	% del total	4,5%	18,2%	40,9%	31,8%	4,5%	100,0%

Tabla 23.2: Resumen de la prueba de signos de muestras relacionadas entre los indicadores de la PPI y la PPF

Hipótesis nula	Test	Sig.	Decisión
La mediana de las diferencias entre ID1I y ID1F es igual a 0	Prueba de signos de muestras relacionadas	0,000	Rechazar la hipótesis nula
La mediana de las diferencias entre ID2I y ID2F es igual a 0	Prueba de signos de muestras relacionadas	0,000	Rechazar la hipótesis nula
La mediana de las diferencias entre ID3I y ID3F es igual a 0	Prueba de signos de muestras relacionadas	0,000	Rechazar la hipótesis nula
La mediana de las diferencias entre ID4I y ID4F es igual a 0	Prueba de signos de muestras relacionadas	0,000	Rechazar la hipótesis nula
La mediana de las diferencias entre ID5I y ID5F es igual a 0	Prueba de signos de muestras relacionadas	0,001	Rechazar la hipótesis nula
La mediana de las diferencias entre ID6I y ID6F es igual a 0	Prueba de signos de muestras relacionadas	0,000	Rechazar la hipótesis nula
La mediana de las diferencias entre ID7I y ID7F es igual a 0	Prueba de signos de muestras relacionadas	0,000	Rechazar la hipótesis nula
La mediana de las diferencias entre ID8I y ID8F es igual a 0	Prueba de signos de muestras relacionadas	0,000	Rechazar la hipótesis nula
La mediana de las diferencias entre ID9I y ID9F es igual a 0	Prueba de signos de muestras relacionadas	0,000	Rechazar la hipótesis nula
La mediana de las diferencias entre ID10I y ID10F es igual a 0	Prueba de signos de muestras relacionadas	0,000	Rechazar la hipótesis nula

Se muestran las significancias asintóticas. El nivel de significancia es de 0,05



Tabla 23.3: Resumen de la prueba binomial de una muestra para cada indicador de la PPF

Hipótesis nula	Test	Sig.	Decisión
Las categorías definidas por ID1F $\leq 3,000$ y $> 3,000$ se producen con las probabilidades de <b>0,773</b> y <b>0,227</b>	Prueba binomial de una muestra	0,043	Rechazar la hipótesis nula
Las categorías definidas por ID2F $\leq 3,000$ y $> 3,000$ se producen con las probabilidades de <b>0,861</b> y <b>0,139</b>	Prueba binomial de una muestra	0,025	Rechazar la hipótesis nula
Las categorías definidas por ID3F $\leq 3,000$ y $> 3,000$ se producen con las probabilidades de <b>0,819</b> y <b>0,181</b>	Prueba binomial de una muestra	0,00	Rechazar la hipótesis nula
Las categorías definidas por ID4F $\leq 3,000$ y $> 3,000$ se producen con las probabilidades de <b>0,863</b> y <b>0,137</b>	Prueba binomial de una muestra	0,024	Rechazar la hipótesis nula
Las categorías definidas por ID5F $\leq 3,000$ y $> 3,000$ se producen con las probabilidades de <b>0,363</b> y <b>0,637</b>	Prueba binomial de una muestra	0,403	Retener la hipótesis nula
Las categorías definidas por ID6F $\leq 3,000$ y $> 3,000$ se producen con las probabilidades de <b>0,864</b> y <b>0,136</b>	Prueba binomial de una muestra	0,023	Rechazar la hipótesis nula
Las categorías definidas por ID7F $\leq 3,000$ y $> 3,000$ se producen con las probabilidades de <b>0,818</b> y <b>0,182</b>	Prueba binomial de una muestra	0,000	Rechazar la hipótesis nula
Las categorías definidas por ID8F $\leq 3,000$ y $> 3,000$ se producen con las probabilidades de <b>0,957</b> y <b>0,043</b>	Prueba binomial de una muestra	0,000	Rechazar la hipótesis nula
Las categorías definidas por ID9F $\leq 3,000$ y $> 3,000$ se producen con las probabilidades de <b>0,863</b> y <b>0,137</b>	Prueba binomial de una muestra	0,024	Rechazar la hipótesis nula
Las categorías definidas por ID10F $\leq 3,000$ y $> 3,000$ se producen con las probabilidades de <b>0,919</b> y <b>0,081</b>	Prueba binomial de una muestra	0,000	Rechazar la hipótesis nula

Se muestran las significancias asintóticas. El nivel de significancia es de 0,05

**Anexo 24: Resultados de la nota final de la asignatura AM I**

Tabla 24.1: Resultados de la asignatura Análisis Matemático I en los últimos 5 cursos previos al pre-experimento

<b>Cursos</b>	<b>Total</b>	<b>5 puntos</b>	<b>4 puntos</b>	<b>3 puntos</b>	<b>Suspensos EF</b>	
12-13 (CD)	19	1	5	8	11	No se experimentó
13-14 (CD)	38	9	15	8	6	No se experimentó
14-15 (CD)	53	12	18	13	10	No se experimentó
15-16 (CD)	37	3	5	13	16	Diagnóstico inicial
16-17 (CD)	12	1	3	4	4	No se experimentó
<b>17-18 (CD)</b>	<b>10</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>2</b>	<b>0</b>	<b>Pre-experimento</b>
<b>17-18 (CPE)</b>	<b>4</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>Pre-experimento</b>
18-19 (CD)	4	0	1	1	2	No se experimentó
<b>19-20 (CD)</b>	<b>8</b>	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>Corte experimental</b>

CD: Curso diurno; CPE: curso por encuentro.

Tabla 24. 2: Nota final de la asignatura AM I en el CD 17-18 y el CPE 17-18

<b>Nota</b>	<b><math>F_R</math></b>	<b><math>F_R\%</math></b>	<b><math>(F_R\%) \downarrow</math></b>
<b>3</b>	2	14,3	14,3
<b>4</b>	8	57,1	71,4
<b>5</b>	4	28,6	100,0
<b>Total</b>	14	100,0	

Tabla 24.3: Resultados de la prueba binomial de una muestra para las notas finales de AM I

<b>Hipótesis nula</b>	<b>Test</b>	<b>Sig.</b>	<b>Decisión</b>
Las categorías definidas para EXAFIN $\leq 3,000$ y $> 3,000$ se producen con las probabilidades de <b>0,584</b> y <b>0,416</b>	Prueba binomial de una muestra	0,01	Rechazar la hipótesis nula

Se muestran las significancias asintóticas. El nivel de significancia es de 0,05

## **Anexo 25: Participación en eventos y publicaciones**

Los resultados parciales de esta investigación fueron presentados en los siguientes eventos:

- ✓ Evento internacional COMPUMAT 2019. Universidad de la Habana. Cuba.
- ✓ Evento internacional RELME 33 (2019): Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. La Habana, Cuba.
- ✓ Evento Internacional Pedagogía 2019: Encuentro por la unidad de los educadores. Cuba.
- ✓ XII Encuentro Taller Científico Metodológico de la Cátedra “Dulce María Escalona” (2019).
- ✓ Evento Internacional Redincitec. I Encuentro: Ciencia e Innovación Tecnológica. Las Tunas 2017.
- ✓ XII Taller Nacional sobre Tecnología y Educación “TicEdu 2017”.

Se han realizado las siguientes publicaciones científicas:

- ✓ Metodología para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático desde la demostración por inducción completa. Revista MENDIVE. Vol. 17, No. 3, 2019. ISSN 1815-7696.
- ✓ El proceso de desarrollo del pensamiento lógico matemático avanzado. Revista IPLAC. ISSN 1993-6850. No. 3 mayo-junio del 2019, sección: Artículo Científico.
- ✓ Modelo para el proceso de desarrollo del pensamiento lógico-matemático avanzado. Editorial: Educación Cubana. ISBN: 978-959-18-1272-8. Año: 2019.
- ✓ El desarrollo del pensamiento lógico –matemático avanzado. Representaciones semióticas. Editorial: Educación Cubana. ISBN: 978-959-18-1217-9.
- ✓ Una alternativa metodológica para el desarrollo del pensamiento matemático avanzado. Publicado en el libro Ciencia e Innovación tecnológica, Capítulo Ciencias Pedagógicas. Coedición Edacun-Redipe. ISBN: 978-959-7225-27.
- ✓ Nieves, S. (2018). Tesis de Maestría: Estrategia metodológica para el proceso de desarrollo del PMA en la formación inicial del profesor de Matemática, en la Universidad de Pinar del Río.
- ✓ Artículo para la serie interna de la Facultad de Matemática y Computación de la Universidad de La Habana (2018). Estrategia metodológica para el proceso de desarrollo del PMA en la formación inicial del profesor de Matemática, en la Universidad de Pinar del Río.