

**UNIVERSIDAD DE PINAR DEL RIO
FACULTAD DE AGRONOMIA Y FORESTAL
DEPARTAMENTO DE PRODUCCIÓN FORESTAL**

**Tesis presentada en opción al grado científico de
Doctor en Ciencias Forestales**

**MODELO MATEMÁTICO DEL TERRENO
APLICACIÓN FORESTAL**

Autor: MSc. Ignacio Estévez Valdés

Ciudad de Pinar del Río

-2000-

**UNIVERSIDAD DE PINAR DEL RIO
FACULTAD DE AGRONOMIA Y FORESTAL
DEPARTAMENTO DE PRODUCCIÓN FORESTAL**

**Tesis presentada en opción al grado científico de
Doctor en Ciencias Forestales**

**MODELO MATEMÁTICO DEL TERRENO
APLICACIÓN FORESTAL**

Autor: MSc. Ignacio Estévez Valdés

Tutores: Dr. Angel Notario de la Torre.

Dr. Pedro Fernández de Córdoba

Ciudad de Pinar del Río

-2000-

A Nancy, Nancyta e Ignacito.

AGRADECIMIENTOS

Me es imposible listar aquí a todas las personas e instituciones que me han ayudado en el desarrollo de este trabajo. Además no a sido posible citar a todos los autores y obras que han servido de fuente de conocimiento y de modelo en la presentación de todo lo contenido en esta tesis. En consecuencias y pidiendo disculpas por las omisiones en que necesariamente incurriré, deseo patentizar mis más profundos agradecimientos al *Dr. Angel Notario de la Torre*. Vicerrector Docente de la Universidad de Pinar del Río quien me facilitó encontrar el camino de la investigación y siempre me hizo sentir seguro y confiado en el trabajo siempre acompañado de su gran arsenal científico y anímico que incondicionalmente puso siempre a mi disposición.

De igual modo mis más profundos agradecimientos al *Dr. Pedro Fernández de Córdoba*. Profesor del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia España, quien fue un catalizador en el desarrollo de mi investigación, por el entusiasmo en el trabajo que me impregno estimulado esto por las variadas ideas que me facilitó en el campo de la matemática aplicada y la programación.

Así mismo, agradezco debidamente a:

- MSc. Fidel Ernesto Fernández Montero.
- Dr. Gerardo Jiménez Sáez.
- MSc. Noel Ferro Díaz.
- Dr. Daniel Alvarez Lazo.
- Dr. José Felix Rodríguez Hernández.
- Dr. Fidel Cándano Acosta.
- Dr. Eduardo Franco Rosel.

quienes dedicaron parte de su tiempo en la reflexión de algunas cuestiones relacionadas con los temas tratados en esta tesis, aportando comentarios y criticas constructivas y valiosas.

Al Lic. Wilfredo Hernández Palacio, por haberme colocado en el camino de la enseñanza superior.

A la Universidad Politécnica de Valencia que a través del CETA facilito el desarrollo de la Maestría en Matemática Aplicada desarrollada en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería Industrial del

Instituto Politécnico José Antonio Echevarría, quien facilitó mi formación contribuyendo esto a la culminación de esta tesis.

A todos los trabajadores del Centro de Información Científico Técnica de la Universidad de Pinar del Río, por brindarme facilidades de adquisición de los materiales bibliográficos.

A nuestro ministerio y Universidad por facilitar y estimular el trabajo en la investigación.

Por ultimo, especialmente a mis suegros, padres, hermana y demás familiares por contribuir a llenar el espacio que quedo vacío en la crianza de mis pequeños niños, cuando ponía el tiempo en función de mi investigación y darme aliento y confianza en cada momento difícil vivido.

SINTESIS

En la actualidad, con el concurso de los ordenadores personales, por su gran capacidad de almacenamiento de datos, velocidad y seguridad en los cálculos ha sido posible la implementación de softwares que con la herramienta matemática debida puedan simplificar sobremanera el trabajo del hombre en su afán por actuar sobre el medio que lo rodea.

En la presente investigación se confeccionaron tres Modelos Digitales del Terreno (MDT.), evaluados en, relieve llano, ondulado y montañoso, arribándose a conclusiones relacionadas con la calidad de los resultados cuantitativos que se alcanzan en cada modelo. El primer (MDT.) al igual que los demás fue definido sobre una red regular de cotas, relativa a un relieve determinado, usa como herramienta matemática para la interpolación las ecuaciones bilineales que tienen la forma $Z(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$ esta es un caso particular del los polinomio de interpolacion de Lagrange en dos variables del que se derivan las ecuaciones usadas en los restantes modelos, polinomios bicuadrático y bicúbico.

$$Z(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6yx^2 + a_7xy^2 + a_8x^2y^2$$

$$Z(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6yx^2 + a_7xy^2 + a_8x^2y^2 + a_9x^3 + a_{10}y^3 + a_{11}xy^3 + a_{12}yx^3 + a_{13}x^2y^3 + a_{14}y^2x^3 + a_{15}x^3y^3$$

En todos los casos existe la posibilidad de redensificar la matriz de cotas sobre la que se definen estos tres modelos, a partir de la interpolación en las secciones transversales con spline cúbico natural, lo que aumenta la posibilidad en exactitud. Estos modelos poseen gran valor en el campo de la ingeniería forestal pues permitirán la automatización de aplicaciones tales como el dibujo de perfiles, la creación de mapas de curvas de nivel, la determinación de la altura del arbolado y la caracterización de la pendiente en un relieve dado entre otras.

Además se creó la posibilidad de diseñar el eje de un vial a mano alzada directamente en el display de la computadora sobre una plantilla de isocotas, teniendo en cuenta las normas técnicas exigidas para su construcción, con la alternativa de ofrecer al usuario las coordenadas de las estaciones cada veinte

metros, aspecto de notable importancia para su diseño y replanteo. En este sentido es importante destacar que para el diseño del vial se usaron, por las exigencias del problema a resolver, la función spline paramétrico con

ecuación $C = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} 1 \leq t \leq n$ la que resuelve suavidad y continuidad

conveniente en toda la trayectoria, se logró calcular las coordenadas planas de todos los puntos a 20m sobre la curva, a partir de la aplicación de la fórmula

integral $L_c = \int_a^b \sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2} dt$ de la que se obtuvo la ecuación integral

$\int_a^x \sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2} dt - m = 0$ la que mediante la solución por métodos

numéricos de integración **Simpson** y de solución de ecuaciones **Bisección**, se resolvió de forma adecuada.

Se calculó además la curvatura en todas las estaciones mediante la ecuación

$K = \frac{1}{R} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{((x')^2 + (y'')^2)^{\frac{3}{2}}}$ relativa al cálculo en funciones dadas en

forma paramétrica. Se logra también la confección de una plantilla de isopendientes y a partir de ella conocer el comportamiento de las pendientes en el terreno, además existe la posibilidad de evaluar sobre esta el eje del vial diseñado en la plantilla de isocotas y efectuar la planificación adecuada en las actividades de aprovechamiento forestal que se encuentren en función de la pendiente máxima del terreno. La idea que se siguió para este fin, consistió en

el cálculo de la derivada direccional aproximada $\approx \frac{f(i+h, j+h) - f(i, j)}{\sqrt{h^2 + h^2}}$ en

cada uno de los nodos de la matriz redensificada y en todas las direcciones posibles, guardando la de mayor módulo. En general, todas las soluciones computarizadas conforman un sistema de programas para contribuir al aprovechamiento sostenible del bosque y a la conservación del medio ambiente, facilitando además la posibilidad de analizar alternativas de soluciones ingenieriles.

INTRODUCCIÓN

Antecedentes:

La idea de emprender esta tesis tiene como origen el espectacular desarrollo de la topografía digital, los distintos métodos de muestreo en fotogrametría y el avance de los numerosos sistemas para el diseño asistido por computadoras (CAD) y su uso creciente en las diferentes obras ingenieras.

Como precedente a este trabajo existen varias investigaciones que recorren un intervalo de 19 años, dentro de estas podemos citar:

Jiménez G. y Pérez, J. A.: Determinación de coordenadas altimétricas por métodos digitales. (1977), Gossard: Application of MDT in the forest service (1978), Jiménez G. y Pérez, J. A.: Aplicación del modelo digital del terreno a proyectos viales (1979), Jiménez G. y Tejeda E.: Dos soluciones de la determinación de cotas mediante el modelo digital del terreno(1984), Bada, A.: El MDT. Desarrollo histórico y perspectiva de aplicación a los proyectos viales en Cuba (1984), Pascal, LL.: Empleo del MDT en la medición de alturas de arboles (1985), Coffi, A.: El MDT y sus aplicaciones forestales (1986), Valdés, A, Sánchez, I.: Determinación de perfiles longitudinales en un modelo digital simplificado del terreno con datos obtenidos sobre un mapa topográfico (1987), Addo, E.: Estudio sobre la aplicación de un modelo digital simplificado del terreno con datos medidos en el terreno para la ejecución de perfiles longitudinales (1989), Jiménez G.: Un modelo digital del terreno para las proyecciones de carreteras en Cuba (1990), Tchikoue, H.: Sistema de programas para el cálculo automatizado de un trazado a mano alzada partir de un levantamiento topográfico directo (1990) y muy reciente la tesis titulada:

Trazado de viales forestales mediante la modelación matemática”, presentada por el Dr. Hubert Tchikoué, en la Facultad de Agronomía y Forestal de la Universidad de Pinar del Río, en 1996. En ella se ofrece la confección de un algoritmo y programas de ordenador para la optimización del trazado de viales forestales que se apoyan en los datos geodésicos obtenidos a partir de un modelo digital del terreno, la imposición de una geometría compuesta por arcos de circunferencias y rectas de manera que esto responda a una trayectoria

deseada del camino conservando su suavidad y la elaboración de un modelo digital del terreno con polinomios bilineales.

Por ultimo la tesis: Una aplicación de métodos numéricos en la ingeniería civil. Presentada por Estévez, I. (1998) en el ISPJAE para optar por el título de Master en Matemática Avanzada para la Ingeniería donde se confecciona un MDT con polinomios bilineales y se hace uso del gráfico con función spline paramétrico, todo programado sobre MATLAB.

Diseño Metodológico de la investigación:

La necesidad de respuesta cada vez mas rápida y precisa en el campo de la ingeniería y la necesidad de abaratar los trabajos ingenieros y minimizar la acción del hombre sobre el medio, hacen cada vez más posible que la matemática numérica en conjunción con los ordenadores que hoy existen, jueguen un papel muy importante e insustituible en el proyecto de cualquier obra. Sin embargo, los procedimientos de cálculos tradicionales continúan siendo usados tal vez por su simplicidad.

El **problema** principal a resolver en esta investigación puede formularse como: Necesidad de automatizar la determinación de cotas para elevar la eficiencia y la eficacia en las aplicaciones forestales que dependen de esta variable.

En consecuencia la presente tesis a centrado su atención en el siguiente **objetivo**.

- ❖ Elaborar modelos digitales del terreno sobre redes rectangulares, susceptibles a redensificar empleando para ello las funciones spline cubico de una variable y la interpolación segmentaria usando los polinomios de Lagrange de dos variables: bilineal, bicuadrático y bicúbico y su evaluación para tipos de terreno llano, ondulado y montañoso así como diseñar aplicaciones forestales vinculadas con el diseño de caminos, determinación de altura del arbolado y análisis de características del terreno.

Para darle cumplimiento al objetivo general planteado, es necesario resolver los siguientes objetivos particulares:

- Elaborar modelos matemáticos del terreno, basado en la interpolación segmentaria a partir de datos obtenidos en un plano topográfico mediante la lectura de estos auxiliado por las curvas de nivel.
- Obtener la cota de cualquier punto de la superficie de interés por medio de los modelos antes mencionados.
- Analizar los errores cometidos en el cálculo de las cotas por los diferentes modelos para recomendar su uso según el tipo de relieve.
- Programar todos los modelos en sistema Matlab, versión 5.1.0.421 del 1997.
- Desarrollar un algoritmo capaz de permitir un diseño racional en planta del eje del vial desde el punto de vista geométrico para que se minimice lo mayor posible el impacto ambiental al inscribir el trazado en el relieve.
- Determinar el radio de curvatura en los puntos de interés sobre el vial diseñado, con vistas a comprobar el cumplimiento de las normas técnicas.
- Calcular las coordenadas de los puntos o estaciones cada 20 metro del eje del camino con el objetivo del replanteo del mismo.
- Trazar el perfil longitudinal del eje del camino para la selección de alternativas y como paso previo al diseño de la rasante y a la determinación de los volúmenes de tierra a mover.
- Determinar la pendiente máxima de cualquier punto del relieve en dirección de este a cualquier otro de su vecindad y representar gráficamente mediante isopendiente la variabilidad de la pendiente en todo el relieve en estudio.

Capítulo I: Reseña de la literatura utilizada.

1.1- Modelo Digital del Terreno. Apuntes históricos.

Ayeni (1976) plantea que un MDT no es mas que una aproximación matemática adecuada del terreno desde medidas planimétricas y altimétricas, compatibles en número y distribución con el terreno de modo que podemos calcular cualquier coordenada de otro punto distinto al de la base de datos, conociendo las otras dos coordenadas por interpolación, con la precisión requerida o específica para una aplicación determinada.

Existen otros autores como Blasche (1968), (Doyle y Frederick 1978) definieron el MDT como la representación matemática de la superficie del terreno obtenida mediante el almacenamiento ordenado de las coordenadas (x, y, z) en una computadora, de manera tal que permita, entre otras cosas, obtener la elevación z de cualquier punto de coordenadas (x, y) conocidas. De modo similar Jiménez (1988), define el MDT como una masa de puntos representativos de una porción del terreno, expresados mediante sus coordenadas (x, y, z) almacenada de forma adecuada para su procesamiento por computadora, García Santos (1994) plantea que un modelo digital del terreno es una representación digital de las características del terreno mediante las coordenadas (x, y, z) u otro tipo de coordenadas, codificadas en forma y función y almacenadas en un soporte estable tal, que en su posterior procesado, permita hasta en su caso más general, conocer la conformación del terreno, cuantificando y cualificando cada zonificación puntual, lineal, superficial y volumétrica, en cualquier orden, o estructura geométrica, y que además aporte la adecuada metodología para actuar sobre el, y criterios de extracción temática en el mas amplio abanico de posibilidades y con independencia de la escala, las definiciones mas recientes encontradas son de Joly(1988) un MDT es " una representación simplificada de la realidad en la que aparecen algunas de sus propiedades ", Ríos(1995)" un modelo es un objeto, concepto o conjunto de relaciones que se utilizan para representar y estudiar de forma simple y comprensible una porción de la realidad empírica " , MDT, o Modelo Digital del Terreno es una estructura numérica de datos que representa la distribucion

espacial de una variable cuantitativa y continua todas estas definiciones se encuentran en un curso que aparece en Internet CursoMDT.html (2000).

Por lo abarcador de las definiciones un MDT puede contener otras características tales como geológicas, hidrológicas, edafológicas, cobertura vegetal, valor y uso del suelo, valor y tipo de construcciones, vías de acceso, flujos magnéticos etc.

El concepto de MDT fue introducido en 1957 por Paul Roberts, en los años cincuenta el profesor Charles L. Miller y sus colegas de Massachusetts Institute of Technology, analizaron las primeras investigaciones sobre Modelo Digital del Terreno. El objetivo de estos estudios fue facilitar el diseño de carreteras por cálculo digital a partir de datos procedentes de la fotogrametría.

1.2- Situación actual en Cuba en la investigación relativa a los MDT.

Hasta la fecha en nuestro país se han llevado a cabo varios trabajos relativos a los MDT y sus aplicaciones, el ISPJAE y la UPR son los centros protagonistas de los mismos, entre los trabajos conocidos se encuentran los de: Jiménez (1977) con un modelo digital que él llama de Superficies Móviles, el que usa una ecuación de aproximación de la forma $Z = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2$ empleando el método de mínimos cuadrados para obtenerla, tomando los datos de forma aleatoria mediante método fotogramétrico, Llanes C. (1978) de este trabajo vale destacar que en el vemos la primera intención de imponer una geometría al trazado a mano alzada del eje de un vial compuesta de segmentos de rectas, arcos de circunferencias y clotoide espiral, el autor trabaja con mapas a escala 1: 20000 y usa el mismo modelo que Jimenez (Superficies Móviles), Jiménez (1979) en el que el autor da una aplicación al modelo usado por el en (1977) para el diseño del eje de un vial, Hernandez (1981) en esta tesis se maneja el termino regular e irregular para la siembra de puntos, se considera regular cuando se organizan en forma de cuadrículas e irregular de forma aleatoria, al igual que los anteriores el emplea el método fotogramétrico para obtener los datos, el modelo digital que usa es el de (Superficies Móviles) y lo aplica en el proyecto de intersecciones de viales, Jiménez (1984) aquí los autores escriben "El MDT puede servir en

consecuencia para definir cualquier otra superficie como pudiera ser la superficie de una plantación o cultivo y por comparación con el MDT la altura y volumen de la cosecha" este es el primer antecedente oficial que encontramos relacionado con una de las aplicaciones de la investigación que hoy desarrollamos (el cálculo de la altura del arbolado) , Bada (1984) en su trabajo hace una clasificación de los tipos de relieves y afirma que en Cuba $\frac{2}{3}$ de su superficie está conformada por terrenos llanos y ondulados el resto montañosos, la siembra de puntos que el propone para crear el MDT por tipo de terrenos es la siguiente: para terrenos llanos y ondulados de 20-100 puntos por ha, en montañosos de 100-400 puntos por ha y en montañosos muy crítico o sea superficies que el clasifica como artificiales mas de 400 puntos por ha, el emplea las superficies polinómicas de segundo grado en terrenos ondulados y reporta un error medio cuadrático en el cálculo de las cotas de $\pm 25\text{cm}$ y una densidad de 25 puntos por ha, Lloyd (1985), Coffi (1986), J.A. Valdés (1987), Notario (1988), Addo (1989), Jimenez (1990) en sus modelos toma los datos de planos, mediante fotogrametría y del terreno, los dispone de forma aleatoria y de maya regular cuadrada, emplea en sus modelos el de superficies móviles, superficies móviles simplificadas, polinomios bicuadráticos y polinomios bicúbicos, en el caso de los modelos que emplea los polinomios bicuadráticos y bicúbicos para obtener las ecuaciones trabaja con maya regular cuadrada, y en ambos casos para lograr la ecuación tiene en cuenta la continuidad de la función en cada uno de los cuatro nodos de la cuadrícula sobre la que se define el polinomio y la consideración de las derivadas parciales y cruzadas de primer orden con respecto a (x) y con respecto a (y). TchiKoue (1990, 1992 y 1997) y Estévez (1998) en su investigación emplea los polinomios bilineales como ecuación de interpolación, los datos provienen de un mapa topográfico y están dispuesto en forma redes regulares rectangulares, da la opción de redensificar el dominio de definición del modelo o matriz de los datos mediante el uso de función spline cúbico natural, confecciona una plantilla de isocotas relativa al relieve en estudio y ofrece la opción de trazar el eje de un vial mediante el spline paramétrico.

1.3- Los MDT en las investigaciones forestales en Cuba.

En Cuba, las investigaciones forestales sujetas al empleo de los MDT, comienzan a partir del año 1985 donde Lloyd (1985) utiliza un MDT que se nombra Modelo Digital Simplificado del Terreno en el que usa como ecuación de interpolación planos definidos sobre subconjuntos triangulares garantizándose la conformación de la superficie como un diamante o sea con segmentos de planos triangulares continuos, no se logra la plasticidad en la superficie debido a que las ecuaciones de los planos se logran mediante la condición de continuidad y no se impone nada a las derivadas parciales no solo por el método sino también por la naturaleza de las funciones interpolantes. Mas tarde Coffi (1986) utiliza el mismo modelo que Lloyd en aplicaciones forestales tales como: obtención de perfiles longitudinales para el diseño de caminos tomando los datos de un mapa topografico. En (1987) J.A. Valdés aplica de nuevo el Modelo Digital Simplificado del Terreno en la evaluación del calculo de perfiles longitudinales del terreno y trabaja en la clasificación de pendientes, todo esto lo hace con mapas 1:10000 y equidistancia entre las líneas de nivel de 5m. Notario (1988), realiza investigaciones relacionadas con la planificación general de las redes camineras en los bosques de la República de Cuba con el empleo de métodos de teledetección y el Modelo Digital Simplificado del Terreno con aplicaciones en el trazado de viales forestales y clasificación de pendientes. Posteriormente Addo (1989) en su trabajo de diploma para optar por el titulo de ingeniero forestal emplea de nuevo el modelo anterior, con la variante que los datos fueron tomados mediante procedimiento de campo. TchiKoue (1990) con el Modelo Digital del Terreno Simplificado logra una aplicación en la que traza el eje a mano alzada de un camino, a partir del levantamiento topográfico directo. Posteriormente González y Tchikoue (1992) logran respectivamente de nuevo aplicaciones del modelo antes simplificado el uso por parte del primero de los spline cubico natural para la evaluacion de perfiles y el ajuste matematico a mano alzada del eje de un camino forestal con una geometria compuesta de arcos de circunferencias y segmentos de rectas con continuidad y tangencia garantizada.

En el año 1996 la tesis de Tchikoue trabaja un modelo digital donde la función de interpolación usada es un polinomio bilineal, este polinomio se define sobre

un subconjunto cuadrado perteneciente a una red rectangular en la que los datos son obtenidos mediante el digitalizador y regularizados por interpolación, en este modelo se logra la continuidad pero al igual que en el simplificado no la derivabilidad de la superficie pues la misma naturaleza de la función interpolante no lo permite, además el autor obtiene las ecuaciones de los planos a partir de cuatro condiciones de continuidad de la función en cada nodo o vértice del cuadrado sobre el cual se define.

Entre las aplicaciones de esta tesis esta el trazado y ajuste matemático a mano alzada del eje de un camino forestal con una geometría impuesta compuesta de arcos de circunferencias y segmentos de rectas con continuidad y tangencia garantizada, obtención de perfil longitudinal del terreno por el eje de la vía con diseño de la rasante y optimización de trazados para viales forestales en función del costo de explotación del bosque y construcción de la vía.

1.4- Análisis crítico de los antecedentes.

Como se puede apreciar en nuestro país se trabaja en el tema relativo a los modelos digitales y sus aplicaciones hace mas de veinte años, en esta investigación se confeccionan tres modelos digitales que se diferencian solo en las ecuaciones de interpolación usada el polinomio bilineal, bicuadrático y bicúbico casos particulares todos del polinomio de Lagrange de dos variables, la naturaleza de los datos es la misma, la forma del dominio de definición es común para los tres modelos (mallas rectangulares regulares) y en los tres casos existe la posibilidad de redensificación empleando el spline cúbico natural.

Tchikoue (1996) en su tesis trabaja con polinomios bilineales, define su modelo también sobre una malla rectangular regular con posibilidad de redensificar, lo que parece muy similar al primer modelo confeccionado en esta investigación, pero la diferencia no es las ecuaciones ni la forma del dominio de definición la diferencia está en la concepción del modelo a la hora de obtener las incógnitas de cada polinomio bilineal definido en los cuadrados (subconjunto de la malla rectangular), en el caso de Tchikoue considera la continuidad de la función bilineal en cada uno de los cuatro nodos de la cuadrícula logrando cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas resuelve el sistema de ecuaciones y logra el

polinomio bilineal que pasa por los puntos de continuidad exigida, en nuestro caso no resolvemos sistema de ecuaciones, empleando el polinomio de Lagrange se obtienen la ecuación del polinomio bilineal que conformará el modelo de forma directa y el tiempo de cómputo será mucho menor que el usado por Tchikoue (1990) y más será la diferencia en la velocidad de cálculo si se tiene en cuenta el caso de los polinomios bicuadráticos y bicúbicos lo que conllevarían a resolver sistema de nueve ecuaciones con nueve variables y dieciséis con dieciséis respectivamente, Jiménez (1990) emplea en sus modelos las ecuaciones bicuadráticas y bicúbicas de nueve y dieciséis coeficientes, para lograr el sistema que conduce a la solución el autor involucra a las derivadas parciales en los nodos y a la continuidad de la función, lo que hace el trabajo desde el punto de vista computacional muy extenso y con esto en definitiva no logra la diferenciabilidad en la frontera al componer todo el relieve en estudio con el cálculo de cada superficie sobre los subconjuntos de definición de la malla.

El uso de los polinomios bicuadráticos y bicúbicos en esta investigación, está dado, porque son superficies más ajustadas al relieve real debido a que en el caso de la primera las curvas de intersección de la superficie con los planos paralelos a los planos coordenados son parábolas cuadráticas y en la segunda son parábolas cúbicas, no así en los polinomios bilineales usados por Tchikoue y lineales (usado por Notario y otros) donde las ecuaciones de las curvas correspondientes son rectas y es de suponer que una recta no es lo más que se aproxima a una traza sobre la superficie terrestre y más si el terreno no es llano. La base de datos usada proviene de la lectura directa de coordenadas sobre el mapa topográfico de escala 1:10000 y equidistancia 5m de forma ordenada en cuadrículas, las que conforman una malla rectangular que cubre el relieve de interés, este método hace fácil y barato el procedimiento y la malla responde a las condiciones que exige el polinomio interpolador que se usa, hace muy rápido el cálculo por parte del ordenador, además facilita el método para la clasificación de la pendiente aplicando la derivada direccional aproximada y si se tiene en cuenta que están creados los programas para regularizar una red de puntos aleatorios por otros autores ejemplo Tchikoue (1990) se entenderá la mayor flexibilidad de esta disposición en los datos.

El proceso de redensificación no es solo con la intención de lograr mas exactitud, dentro de este se concibe además la idea de mejorar la representación espacial y en curvas de nivel del relieve, logrando en ambos casos la plasticidad gráfica requerida. La función escogida para redensificar la matriz y representar los perfiles es el spline cúbico natural debido al comportamiento de esta función en cuanto a continuidad, derivabilidad y el interés de usar la función interpoladora menos curvadas posible, además se ha tenido en cuenta los buenos resultados obtenidos por Tchikoue (1996) y Gonzalez (1992) en el uso de esta función con intensiones muy similares.

Relativo al trazado a mano alzada del eje de un vial forestal en esta investigación se emplea la función spline cúbico paramétrico, esta responde con muy buen comportamiento a las exigencias técnicas a tener en cuenta en el diseño de un vial, garantiza continuidad y plasticidad en toda su trayectoria y resuelve las coordenadas planas de las estaciones cada 20m mediante la solución numérica de una ecuación integral muy simple. Además de cada estación se calcula el radio de curvatura para que el eje responda a las exigencias técnicas del vial en proyecto y todo este proceso se visualiza rapidamente en el display sobre una plantilla de isocotas oisopendientes correspondiente al relieve en proyecto, no es la primera vez que se intenta automatizar este proceso existen antecedentes entre estos están los trabajos llevados a cabo por Llanes (1978), Tchikoue (1996) él usa segmentos de rectas y arcos de circunferencias imponiendo comportamiento tangencial en todas las uniones de segmentos con los arcos, la composición del eje de la vía por segmentos y arcos de circunferencia no solo tiene un fin de lograr diferenciabilidad en toda la trayectoria además es concebida para poder calcular las coordenadas de las estaciones cada 20m sobre el eje del camino y el calculo del radio de curvatura de las estaciones que se encuentren sobre un arco de circunferencia que siempre será constante para las estaciones que están sobre el mismo arco y las que estan sobre los segmentos de rectas tienen un radio tendiente a infinito, esta geometría impuesta hace más rígido el trazado del eje del vial y el tiempo de computo para tramos de mas de un kilometro se hace lento, agregando que la implementación del aparato matemático que soporta el método es bastante largo y complicado y Estévez (1988) establece el trazado a través de una función spline paramétrico pero no

logra obtener las coordenadas de las estaciones ni su radio de curvatura por lo que su resultado no tiene aplicación práctica.

Debido a la naturaleza del dominio de definición de nuestros modelos es posible calcular la pendiente máximas en cada punto y en cualquier dirección posible sobre la malla rectangular, se obtienen usando las derivadas direccionales aproximadas método que logra buena exactitud, muy fácil comprensión y programación, estos resultados pueden tener una salida cunatitativa y gráfica mediante una plantilla de isopendientes. Valdés (1987) usa para clasificar la pendiente la relación de posición entre dos planos uno es el que se corresponde con el segmento triangular que se analiza y el otro es el plano horizontal lo que hace considerar que las pendientes en la porción de un relieve es contante y en realidad ese no es el comportamiento y Notario (1988) realiza la clasificación calculando las pendientes las rectas determinadas por los vértices de los segmentos triangulares que conforman la superficie identificada con el relieve, tomándose la de mayor valor absoluto y haciendola corresponder con un color el que aparecerá relacionado con la porción triangular de la superficie correspondiente al dominio de la función que contiene el segmento triangular, este método es muy practico y sencillo es natural concebirlo en este caso por la naturaleza del modelo digital usado, asume que las pendientes en todos los puntos de una porción del relieve en cualquier dirección es contante y esta rigidez tiene mucho que ver a nuestro juicio con las funciones de interpolación usadas.

Es importante destacar que en esta investigación todos los programas se han confeccionado sobre MATLAB versión 5.1.0.421 del 1997, esto es debido a que este software da muchas facilidades para el trabajo con matrices, nuestras variables son matrices o parte de ellas y los métodos numéricos sin esta potente herramienta no son nada, el propio nombre del software lo anuncia MAT de matriz, LAB laboratorio, o sea laboratorio de matrices y además posee una cantidad de funciones y cajas de herramientas que hacen muy fácil hacer programas de alto contenido matemático, considerando también la posibilidad que tiene de graficar en el espacio y en el plano.

CAPÍTULO II: Fundamentación Matemática de las Herramienta Utilizadas.

En este capítulo trataremos las herramientas matemáticas utilizadas en la solución de los problemas de aplicación abordados en esta tesis, de manera que se pueda tener una idea clara sobre en qué base matemática están soportados todos los modelos utilizados para dar respuesta a las aplicaciones exigidas.

2.1- Spline cúbico natural.

Una forma de obtener mediante interpolación una buena aproximación de una función dada, es usar la interpolación a trozos o segmentaria dentro de esta trataremos lo spline cúbicos nombrado también cerchas cúbicas o funciones curvigrafas cúbicas nombres sujetos al uso por parte de los ingenieros de plantillas flexibles que se pueden sostener por pesos, de manera que pase a través de cada uno de los puntos dados, pero conservando la lisura en cada intervalo.

Se divide el intervalo inicial $[a,b]$ en donde está definida la función o en el que se encuentran los valores dados, en subintervalos más pequeños y se aproxima la función en cada uno de ellos por polinomios de interpolación de grado bajo, exigiendo que estos polinomios se solapen con "suavidad".

Sea $\{x_i, y_i\}_{i=0}^{i=n}$ una colección de puntos, satisfaciendo

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Llamemos $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ para $j = 1, 2, \dots, n$

Si se considera los splines cúbicos tenemos $4n$ incógnitas a_i, b_i, c_i, d_i ;

$i = 1, \dots, n$, estos coeficientes son los de las funciones $S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$ definidas en cada subintervalo I_j las ecuaciones necesarias son entonces $4n$ las que se obtienen exigiendo:

- 1). La función pasa por (x_0, y_0) (1 ecuación)

$$S_1(x_0) = y_0 \quad (2.1)$$

2). La función pasa por los puntos interiores [2 (n – 1) ecuaciones]:

$$S_i(x_i) = y_i \quad S_{i+1}(x_i) = y_i \quad ; i = 1, \dots, n-1 \quad (2.2)$$

3). La función es una vez derivable en los puntos interiores (n – 1 ecuaciones):

$$S'_{i+1}(x_i) = S'(x_i) \quad ; i = 1, \dots, n-1 \quad (2.3)$$

4). La función es dos veces derivable en los puntos interiores

(n-1 ecuaciones):

$$S''_{i+1}(x_i) = S''(x_i) \quad ; i = 1, \dots, n-1 \quad (2.4)$$

5). La función pasa por (x_n, y_n) (1 ecuación):

$$S_n(x_n) = y_n \quad (2.5)$$

Tenemos $2 + 2(n-1) + (n-1) + (n-1) = 4n - 2$ ecuaciones para completar $4n$ ecuaciones necesarias se suele exigir la condición que la segunda derivada tome unos valores dados en los extremos del intervalo **Samarski (1986)**:

$$S''_1(x_0) = \alpha \quad S''_n(x_n) = \beta \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (2.6)$$

En el caso de los valores posibles que puede tomar α, β , debe estar identificado con los problemas que se quieran abordar y de hecho los hay variados, por ejemplo $\alpha = \beta = 0$ se denomina spline natural.

Se puede ver cómo se obtiene el sistema de ecuaciones de $4n$ incógnitas:

$$\begin{aligned} a_1 x_0^3 + b_1 x_0^2 + c_1 x_0 + d_1 &= y_0 \\ a_{i+1} x_i^3 + b_{i+1} x_i^2 + c_{i+1} x_i + d_{i+1} &= y_i \\ a_i x_i^3 + b_i x_i^2 + c_i x_i + d_i &= y_i \\ 3a_{i+1} x_i^2 + 2b_{i+1} x_i + c_{i+1} - 3a_i x_i^2 - 2b_i x_i - c_i &= 0 \\ 6a_{i+1} x_i + 2b_{i+1} - 6a_i x_i - 2b_i &= 0 \\ a_n x_n^3 + b_n x_n^2 + c_n x_n + d_n &= y_n \\ 3a_1 x_0^2 + 2b_1 x_0 + c_1 &= \alpha \\ 3a_n x_n^2 + 2b_n x_n + c_n &= \beta \\ i &= 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Este sistema puede escribirse en forma matricial $Ax = b$.

A continuación se expone para ilustrar la forma en que quedan las matrices en el sistema anterior para un caso particular.

Se puede hallar el spline cúbico correspondiente a los puntos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) .

Se presenta el sistema y la matriz asociada al sistema relativo a este ejemplo.

Sistema de ecuaciones a partir de las condiciones impuestas:

$$\begin{aligned}
 a_1 x_0^3 + b_1 x_0^2 + c_1 x_0 + d_1 &= y_0 \\
 a_1 x_1^3 + b_1 x_1^2 + c_1 x_1 + d_1 &= y_1 \\
 a_2 x_1^3 + b_2 x_1^2 + c_2 x_1 + d_2 &= y_1 \\
 a_2 x_2^3 + b_2 x_2^2 + c_2 x_2 + d_2 &= y_2 \\
 a_3 x_2^3 + b_3 x_2^2 + c_3 x_2 + d_3 &= y_2 \\
 a_3 x_3^3 + b_3 x_3^2 + c_3 x_3 + d_3 &= y_3 \\
 3 a_2 x_1^2 + 2 b_2 x_1 + c_2 - (3 a_1 x_1^2 + 2 b_1 x_1 + c_1) &= 0 \\
 3 a_3 x_2^2 + 2 b_3 x_2 + c_3 - (3 a_2 x_2^2 + 2 b_2 x_2 + c_2) &= 0 \\
 6 a_2 x_1 + 2 b_2 - 6 a_1 x_2 - 2 b_1 &= 0 \\
 6 a_3 x_2 + 2 b_3 - 6 a_2 x_2 - 2 b_2 &= 0 \\
 6 a_1 x_0 + 2 b_1 &= 0 \\
 6 a_3 x_3 + 2 b_3 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Matriz asociada al sistema:

$$\begin{bmatrix}
 x_0^3 & x_0^2 & x_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \\
 -3x_1^2 & -2x_1 & -1 & 0 & 3x_1^2 & 2x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -3x_2^2 & -2x_2 & -1 & 0 & 3x_3^2 & 2x_3 & 1 & 0 \\
 -6x_1 & -2 & 0 & 0 & 6x_1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -6x_2 & -2 & 0 & 0 & 6x_2 & 2 & 0 & 0 \\
 6x_0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6x_3 & 2 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

2.2- Polinomio de Lagrange de dos variables independientes sobre redes rectangulares.

Una red rectangular de lados paralelos a los ejes de coordenadas es una distribución de puntos (o nodos) como en el ejemplo siguiente:

$$\begin{array}{cccccccc}
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (x_6, y_3) \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (x_6, y_2) \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (x_6, y_1) \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (x_6, y_0) \\
 (x_0, y_0) & (x_1, y_0) & (x_2, y_0) & (x_3, y_0) & (x_4, y_0) & (x_5, y_0) & (x_6, y_0) &
 \end{array}$$

En general el polinomio de Lagrange $q_{n,m}(x, y) \in Q_{n,m}(x, y)$ que en los nodos (x_i, y_j) de la red toma los valores $W_{i,j}$ es:

$$q_{n,m}(x, y) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m}} W_{i,j} L_{i,j}(x, y) \quad (2.10)$$

Por ejemplo en la red anterior los espacios de polinomios $Q_{n,m}(x, y)$ (el $Q_{6,3}(x, y)$) son adecuados para resolver problemas lagrangianos cuyos datos están referidos a una red rectangular de lados paralelos a los ejes.

Los correspondientes polinomios de Lagrange (que valen 1 en un punto y 0 en todos los demás) son fáciles de obtener la función $(x-x_r)$ se anula en todos los puntos de la red cuya primera coordenada sea x_r y la función $(y-y_s)$ se anula en todos los puntos de la red cuya segunda coordenada valga y_s . Usando productos de funciones de este tipo se pueden conseguir los polinomios fundamentales de Lagrange, Por ejemplo, para la red anterior, el L_{01} , correspondiente al nodo (x_0, y_1) , es

$$L_{01}(x, y) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_6)(y-y_0)(y-y_2)(y-y_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_6)(y_1-y_0)(y_1-y_2)(y_1-y_3)} \quad (2.11)$$

2.3- Norma (Euclidiana) de un vector.

En el espacio euclídeo se define la norma o distancia entre dos puntos de la siguiente manera.

Se llama punto x de un espacio n -dimensional el conjunto ordenados de números reales $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. El número x_i se llama coordenada i del punto x ; $i=1, 2, \dots, n$.

La distancia entre dos puntos (x_1, x_2, \dots, x_n) e (y_1, y_2, \dots, y_n) se define por la formula:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \quad (2.12)$$

El conjunto de todos los puntos de un espacio n -dimensional, para los cuales a sido definida la distancia por la formula anterior se llama espacio euclideo y a esta distancia norma euclideana.

2.4- Error absoluto.

Dada dos cantidades, se necesita disponer de un método de medición del tamaño de su diferencia: si a es una aproximación de la cantidad x , se define el error absoluto e como.

$$e = |x - a| \quad (2.13)$$

2.5- Spline paramétrico.

Si se tiene un conjunto de coordenadas del plano, se puede obtener una curva C , que pase por todos ellos garantizando la continuidad no solo en toda la curva sino también en las primeras y segundas derivadas lo que garantizará una suavidad adecuada.

La función que puede garantizar este hecho es la paramétrica con la forma siguiente:

$$C = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (2.14)$$

Tal que para: $t = 0, x = x_0, y = y_0$

$$\begin{array}{ccc} t = 1, x = x_1, y = y_1 \\ : & : & : \\ . & . & . \\ t = n, x = x_n, y = y_n \end{array} \quad (2.15)$$

Debemos señalar que en esta función vectorial tanto las funciones $x = x(t)$ como $y = y(t)$, son splines cúbicos naturales en t , y esta función responde de forma óptima a los intereses que en su aplicación se exige.

2.6- Aplicación de la integral definida al cálculo de la longitud de un arco de una curva dada. Ecuación integral.

Existen una serie de problemas que llevan al concepto de Integral Definida. Todos ellos tienen en común que en los mismos, el hallar el valor de alguna magnitud nos lleva a la definición del límite de cierta suma integral.

En este caso nos detendremos en el cálculo de la longitud de un arco de curva.

Si la curva viene dada en forma paramétrica:

$$C = \begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b \quad (2.16)$$

la expresión que se identifica con la longitud de la curva tiene la forma:

$$L_c = \int_a^b \sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2} dt \quad (2.17)$$

Esta integral nos permitirá obtener la longitud de la curva C , no obstante si el problema consistiese en resolver hasta que valor de el límite superior la

longitud de la curva calculada es igual a **m**, con (**x<b**), entonces se obtendría una ecuación integral con la forma:

$$\int_a^x \sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2} dt - m = 0 \quad (2.18)$$

La que, resolviéndola de forma analítica o numérica nos provee del valor de x para satisfacer la identidad.

2.7- Método de Simpson para el cálculo integral.

La regla de Simpson es de gran importancia práctica porque es suficientemente exacta para la mayor parte de los problemas. Para obtener esta fórmula se subdivide el intervalo de integración [a , b] en un numero par de subintervalos iguales, es decir en 2n subintervalos de longitud $h=(b-a)/2n$, con puntos extremos ($a=x_0, x_1, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}=b$). Se consideraran los dos primeros subintervalos y se aproximara f(x) en el intervalo $x_0 \leq x \leq x_2 = x_0 + 2h$, mediante el polinomio de Lagrange $P_2(x)$ que pasa por $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$. Se obtiene

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_2)(x_1-x_0)} f(x_1) + \frac{(x-x_1)(x-x_0)}{(x_2-x_1)(x_2-x_0)} f(x_2) \quad (2.19)$$

Los denominadores son: $2h^2$; $-h^2$ y $2h^2$, respectivamente. Si se hace $s=(x-x_1)/h$ se tiene $x-x_0=(s+1)h$, $x-x_1=sh$, $x-x_2=(s-1)h$, y se obtiene.

$$P_2(s) = \frac{1}{2} s(s-1) f(0) - (s+1)(s-1) f(1) + \frac{1}{2} s(s+1) f(2) \quad (2.20)$$

Ahora, se integra con respecto a x , desde x_0 hasta x_2 . Esto corresponde a integrar con respecto a s , desde -1 hasta 1 . Dado que $dx=h ds$, el resultado es simplemente

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{-1}^1 P_2(s)ds = h\left\{\frac{1}{3}f(0) + \frac{4}{3}f(1) + \frac{1}{3}f(2)\right\} \quad (2.21)$$

Se cumple una formula semejante para los dos subintervalos siguientes, desde x_2 hasta x_4 , etc. Resumiendo todas estas n fórmulas se obtiene la **regla de Simpson**.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 2f_{2n-2} + 4f_{2n-1} + f_{2n}) ; \quad (2.22)$$

donde $h=(b-a)/2n$ y $f_j = f(x_j)$.

2.8- Método de bisección para la solución de ecuaciones.

Este método resulta ser sencillo, para determinar un cero de $f(x)$, cuando esta es continua. Se basa en el teorema del valor intermedio para funciones continuas, según el cual un intervalo $[a, b]$ en cuyos puntos extremos $f(x)$ tiene signos opuestos, por ejemplo $f(a).f(b)<0$. Esto sugiere el método de bisección repetida del intervalo y, en cada paso, tomar aquella mitad que también satisfaga esa condición.

2.9- Formula para el cálculo de la curvatura de una curva plana.

Dada la ecuación:

$$C = \begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \end{cases} a \leq t \leq b \quad (2.23)$$

La ecuación para calcular la curvatura de dicha curva viene dada por la expresión:

$$K = \frac{1}{R} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{((x')^2 + (y'')^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.24)$$

donde R es el radio de curvatura.

A modo de ilustración veamos un ejemplo:

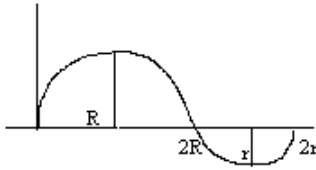


Fig. 2.1 Dos semicircunferencias continuas.

Consideremos dos semicircunferencias continuas de radio R y r respectivamente.

Calculemos el radio de curvatura en las semicircunferencias.

La circunferencia de radio R tiene por ecuación paramétrica:

$$C = \begin{cases} x = R \cos(t) + R \\ y = R \sin(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi \quad (2.25)$$

$$x' = -R \sin(t)$$

$$y' = R \cos(t)$$

$$x'' = -R \cos(t)$$

$$y'' = -R \sin(t)$$

(2.26)

$$K = \frac{|-R \sin(t)(-R \sin(t)) - (-R \cos(t)R \cos(t))|}{\sqrt{((-R \cos(t))^2 + (-R \sin(t))^2)^3}} = \frac{|R^2|}{\sqrt{R^6}} = \frac{1}{R} \quad (2.27)$$

Para la circunferencia de radio r, la ecuación paramétrica es:

$$L = \begin{cases} x = r \cos(t) + 2R + r \\ y = r \sin(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} x' &= -r \sin(t) \\ y' &= r \cos(t) \\ x'' &= -r \cos(t) \\ y'' &= -r \sin(t) \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{|-r \sin(t)(-r \sin(t)) - (-r \cos(t)r \cos(t))|}{\sqrt{((-r \cos(t))^2 + (-r \sin(t))^2)^3}} = \\ &= \frac{|r^2|}{\sqrt{r^6}} = \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Como se observa en ambos casos, mediante la aplicación de la fórmula se obtiene el radio de curvatura de ambas circunferencias.

2.10- Derivada direccional aproximada.

Si se tiene una función $Z = f(x, y)$, de dos variables, continua en una red rectangular regular con $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$, de la que se conoce las coordenadas de cada uno de sus nodos (x_i, y_j, z_k) , se puede calcular la derivada direccional aproximada de la función en el punto o pivote (x_i, y_j) en

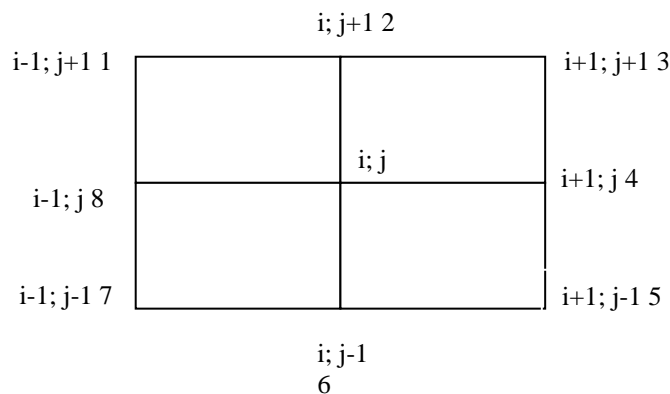


Fig. 2.2 Vecindad del punto (i, j) .

dirección de este punto a cualquier otro de su vecindad.

Si los puntos son interiores o sea tienen 8 puntos vecinos la situación es como se muestra en el gráfico anterior y se puede calcular las derivadas direccionales aproximadas en el punto (i ; j) en dirección, de este punto, a cualquiera de los ocho puntos vecinos por la expresión

$$\approx \frac{f(i+h, j+h) - f(i, j)}{\sqrt{h^2 + h^2}}; \text{ como: } h=1 \frac{f(i+h, j+h) - f(i, j)}{\sqrt{2}} \quad (2.31)$$

Por ejemplo veamos que forma debe tener la drerivada direccional aproximada de la función $Z= f(x,y)$ en el punto (i ; J) en dirección de este al punto 3

$$\approx \frac{f(i+1, j+1) - f(i, j)}{\sqrt{2}} = \frac{f(i+1, j+1) - f(i, j)}{\sqrt{2}} \quad (2.32)$$

si se quisiera calcular en dirección al punto 2 entonces la expresión queda de la forma

$$\approx \frac{f(i, j+1) - f(i, j)}{\sqrt{1}} = \frac{f(i, j+1) - f(i, j)}{1} \quad (2.33)$$

En el caso que el punto pivote se encuentre en la frontera entonces si no es de los vertices sucede que se reduce a lo descrito anteriormente solo que se excluirían puntos, por ejemplo, si el punto se encuentra en el interiorde la recta frontera inferior (j=1) entonces se reduciría a calcular las derivadas en direccion de los puntos 8,1,2,3,4 o sea solo5 derivadas y de forma similar con los que se encuentran en las tres restantes fronteras.

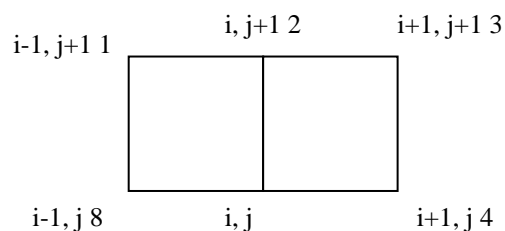


Fig. 2.3 Vecindad del punto (i , j) en la frontera.

Si el punto fuera un vértice entonces se reduciría aún más el número de derivadas, por ejemplo si el punto es el de coordenadas (n,m), solo se calcularían tres derivadas, en dirección a los puntos 6, 7, 8, veamos.

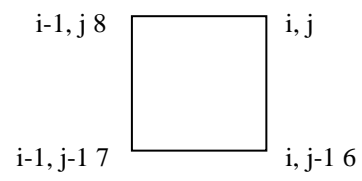


Fig. 2.4 Vecindad del punto (i, j) en el vertice.

Este es un trabajo muy similar al que se hace con las diferencias finitas.

CAPITULO III: Modelo Digital del Terreno (MDT).

En la presente investigación se abordaran algunos aspectos importantes relativos a los MDT, así como la descripción y evaluación de los modelos y las variantes que se han concebido en este trabajo, con el objetivo de su aplicación en el campo de la Ingeniería Forestal.

3.1- Diferentes MDT creados y utilizados en algunos países.

A continuación se presenta de forma resumida las características de los diferentes MDT creados y utilizados en algunos países.

Sistema EGI: Francia, 1963: Este sistema tenía como objetivo fundamental facilitar la determinación de cotas para el proyecto de autopistas. En el que fueron empleados mapas de escala grande y para la interpolación polinomios de segundo grado, del tipo

$$Z_i = ax_i^2 + by_i^2 + cx_iy_i + dx_i + ey_i + f; i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.1)$$

Sistema TERRA: Gran Bretaña, 1968: Se empleo para el cálculo de cotas en los proyectos para el diseño de carreteras. Merece señalarse el empleo de equipos fotogramétricos de primer orden para la digitalización del terreno lo cual se ejecuta de forma aleatoria pero siguiendo las líneas paralelas a uno de los ejes del equipo. La densidad de puntos es variable de acuerdo a las condiciones del terreno.

Modelo VIATEK, Finlandia 1964: La concepción de este modelo esta hecha sobre la base de la simplicidad y rapidez de la solución, por lo que solo utiliza 3 ó 4 puntos a lo sumo para la interpolación. Se emplea la interpolación lineal a partir de la ecuación general del plano.

La adquisición de los puntos puede ser fotogramétrica, de mapas existentes o de trabajos topográficos de campo y la densidad empleada depende del nivel

de complejidad del terreno. Los valores de densidad oscilan entre 20 y 400 puntos por hectáreas.

Modelo VV, Suecia 1967: El modelo fue ideado para analizar variante de trazados en planta-perfil de carreteras en relación con el movimiento de tierra. En él se emplea el método de las superficies móviles descrito por Schut (1976). El polinomio de interpolación utilizado es

$$Z_i = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5y^2 \quad (3.2)$$

La adquisición de los puntos es fotogramétrica o por procedimientos terrestres y los puntos seleccionados siguen las líneas características del relieve. La densidad de la siembra oscila entre 100 y 150 puntos por hectáreas.

Modelo Bilineal, Cuba 1996: Este modelo fue creado en la Universidad de Pinar del Rio por (Tchickoué 1996) con el objetivo de aplicaciones forestales. Para la interpolación uso ecuaciones polinomios bilineales $Z = a + bx + cy + dxy$ y para obtener sobre cada subconjunto del dominio de definición los coeficientes del polinomio bilineal resolvió el sistema de ecuaciones derivado de considerar la continuidad del polinomio en los cuatro nodos de cada cuadrícula logrando así cuatro condiciones con cuatro ecuaciones lo que hace un sistema de solución única.

La información topográfica se obtiene mediante un digitalizador de mesa y el procesamiento mediante un programa que realiza la transformación de coordenadas del digitalizador a coordenadas geodésicas.

El GTOPO 30: Es un Modelo Digital de Elevación (MDE), se completo en 1996 y fue desarrollado durante mas de tres años por EROS Data Center (EDC) con la colaboración de National Aeronautics and Space Administration ([NASA](#)), United Nations Environment Programme/Global Resource Information Database ([UNEP/GRID](#)), U.S. Agency for International Development ([USAID](#)), Instituto Nacional de Estadística Geográfica e Informática ([INEGI](#)) de México, Geographical Survey Institute ([GSI](#)) de Japón, [Manaaki Whenua Landcare Research](#) of New Zealand, y el Scientific Committee on Antarctic Research ([SCAR](#)).

Los MDT son parte importante de los Sistemas de Información Geográfica (SIG) así como los software de topografía, por lo que se abordará algunos de los mas actuales sistemas:

Dentro de los SIG esta el **Idrisi-32**, mediante este se puede hacer un procesamiento de imágenes y análisis estadístico espacial, esta soportado sobre window y no hace falta un ordenador muy avanzado para su uso, también el **Grass** con las versiones existentes la 4.2, 4.3, y 5.0, en este sistema se puede hacer también tratamiento gráfico y usa la función spline para la interpolación.

En cuanto a los Software de Topografía encontramos :

Pocket CARTOMAP: es una aplicación para captura de datos, topografía de campo, replanteo y otras, que se ejecuta en un ordenador compatible con Windows.

La ventaja de este sistema es la total disponibilidad en campo de todas las herramientas de un programa de topografía e ingeniería. Permite la recolección de datos, su tratamiento y análisis “in situ”, facilitando enormemente la toma de decisiones en la ejecución de trabajos topográficos.

El Modelo Digital del Terreno se calcula a partir de un algoritmo propio que permite calcularlo en tiempo real (100.000 puntos en 30 segundos). El MDT se genera a partir de puntos situados en diferentes capas de información, y se puede regenerar automáticamente al introducir nuevos puntos o eliminar puntos ya existentes.

Para que el MDT se ajuste totalmente al terreno, es posible definir líneas de rotura en puntos de quiebro del terreno como vaguadas, taludes y otras. También se puede ceñir el MDT a una zona de inclusión, para evitar que puntos fuera del límite intervengan en el cálculo del MDT.

Pocket CARTOMAP soporta múltiples MDT en un mismo proyecto, por lo que se pueden realizar comparaciones de terrenos de forma gráfica.

Cada MDT se puede visualizar con un tipo de línea y color diferente, y se pueden establecer prioridades entre ellos, los diferentes MDT definidos se pueden editar de forma totalmente interactiva, observando incluso las modificaciones sobre las curvas de nivel.

MGE Modeler: (MGM) proporciona funcionalidades de modelos digitales del terreno (DTM) para flujos de trabajo en cartografía. MGE Modeler ofrece un amplio rango de utilidades para la creación, edición y visualización de modelos triangulares (TIN) y modelos de rejilla (GRID).

MGE Modeler representa información del terreno tercera dimensión en varios sistemas de proyección y sistemas de coordenadas. La posibilidad de integrar

diferentes tipos de fuentes de datos ofrece al usuario una flexibilidad en su flujo de trabajo para el diseño e implementación de sus datos. MGE Modeler tiene un interfaz gráfico fácil e intuitivo así como una serie de comandos básicos que permite construir modelos digitales, Modeler es una eficiente y efectiva aplicación para realizar tareas y modelizar superficies del terreno.

Producción de curvas de nivel de alta calidad:

- Generación de curvas de nivel rápida y precisa.
- Representación de las curvas con varios algoritmos de suavizados y filtros.
- Posibilidad de representar las curvas de nivel con diferentes tipos de elementos de Microestacion: líneas, poligonales, curvas, B-splines y Stroked B-splines. También permite directamente escribir las curvas de nivel tanto bidimensional tridimensional.

Autotop 2.0: Permite realizar las curvas de nivel de forma fácil y rápida. En todo momento podemos revocar o modificar las curvas, unir las y alisarlas. Los perfiles pueden realizarse de dos formas:

1) Si se dispone de curvas de nivel planas, o un plano fotogramétrico y una tableta digitalizadora, se traza una línea que define el perfil, y se ira designando las intersecciones o puntos interesantes. La cota se indicará numéricamente de forma fácil.

2) Si se quiere disponer de curvas de nivel en tercera dimensión, podemos utilizar la orden SECCI, con la que simplemente dibujamos una Polilínea (por ejemplo una tubería o camino), que indica el corte sobre las curvas de nivel a realizar. Autotop representa el perfil resultante. Una vez dibujado el perfil, se puede bajar o subir la (rasante) y volver a repetir la sección.

En ambos casos se pueden configurar los datos iniciales del perfil. También se graba el perfil en un fichero para poder modificar los puntos, o redibujarlo.

TCP(Versión Estándar): Es un programa diseñado para asistir al usuario en todas las fases de realización de un proyecto en el ámbito de la Topografía. Sus principales usuarios son administraciones públicas, empresas constructoras, estudios de ingeniería y empresas dedicadas a movimientos de tierra, explotaciones de canteras, minería, oceanografía y medio ambiente.

Genera curvas de nivel con equidistancia dada por usuario. Las curvas en cotas adicionales. Modificación automática del curvado tras cambios en la triangulación.

El suavizado opcional con dos algoritmos diferentes y diez niveles de deformación. Edición de vértices. Etiquetado manual, automático o por líneas de dirección. Rotulación de cotas.

Herramientas para elevación de entidades en cartografía plana.

Puede hacer el cálculo y representación simplificada de perfiles longitudinales y transversales a partir de la triangulación o cartografía digitalizada en tercera dimension. Perfiles por regresión. Entrada manual. Perfiles instantáneos a partir de modelo digital o ficheros de tramos.

Potente definición de guitarras, con personalización de orden de dibujo, tamaño y estilo de texto, rótulos y justificación. Inserción de perfiles transversales en fases. Dibujo continuo o en formatos. Opciones especiales para líneas eléctricas.

Otras opciones de dibujo son la malla tridimensional del terreno, a partir de modelo digital o curvas de nivel, con dimensión de la celda y exageración de la cota especificada por el usuario, mapa de pendientes y direcciones, mapa de alturas, estudios de visibilidad.

TCP (Versión profesional): *Contiene todas las opciones descritas anteriormente, además de las siguientes.*

Es posible representar en un solo perfil varios terrenos y varias rasantes, con sus acuerdos verticales y cotas respectivas, cotas rojas, distancias parciales y a origen, diagramas de curvatura y peraltes, numeración, bloques e insertados. Obtención de perfiles considerando plataformas, cunetas, taludes, firmes, muros y peraltes. Edición gráfica y numérica de los perfiles, secciones tipo y rasante. Cálculo y representación de superficies. Dibujo personalizable por el usuario. Perfiles de drenaje. Conversión de perfiles a partir de puntos o cortes. Conversiones de otros programas comerciales.

Diseño de las secciones aplicables a cada tramo de una alineación, de tipo urbano (definida por vectores) o de carreteras (compuesta por calzada, arcén, mediana, etc.). Definición de plataformas en modo gráfico y/o numérico, así como de cunetas, taludes con o sin berma, tablas de peraltes personalizadas, capas de firme, muros y geología.

Con la asignación de secciones tipo a los diferentes tramos y márgenes de una alineación generamos las secciones constructivas del terreno.

Creación de bases de replanteo por diversos métodos. Cálculo y replanteo por polares o bisección de puntos en planta a partir de bases, puntos de ejes, intervalos, según sus coordenadas o a cero recíproco. Análisis de puntos a partir de sus coordenadas.

Análisis, control e informe de un levantamiento sobre un modelo digital del terreno modificado y/o sobre perfiles elaborados de diseño.

Además de las opciones contempladas en la versión estándar, incluye listados de cubicación con posibilidad de edición, diagramas de masas y cubicación rápida.

Entre las superficies destaca la creación de explanadas con cota fija o variable, el movimiento de tierras a partir de cotas de terreno o cotas de explanación. Y la obtención del modelo digital del terreno modificado a partir del eje y perfiles transversales generados.

Entre las superficies destaca la creación de explanadas con cota fija o variable, el movimiento de tierras a partir de cotas de terreno o cotas de explanación. Y la obtención del modelo digital del terreno modificado a partir del eje y perfiles transversales generados.

Topko: Es un programa para el trabajo topográfico, modela en tercera dimensión. Software para la gestión del relevamiento y la restitución geográfica del territorio en campo topográfico, geodésico, catastral y para la elaboración de la morfología de terreno.

Intergraph SiteWorks SelectCAD: Es una aplicación excepcional. Puede manejar un número ilimitado de MDT de gran complejidad. Además, permite definir rasantes, plataformas, etc., todo de una forma muy visual en 3D. También puede generar todo tipo de planos (con infinidad de opciones de presentación y visualización).

Aplicaciones de MDT funcionando bajo MicroStation

MicroStation no solo es el otro programa de CAD, es un producto de una potencia elevadísima, y superior a cualquiera de las versiones de AutoCAD en multitud de aspectos, sobre todo los relacionados con la velocidad y con el manejo de grandes ficheros. No hay que olvidar que los ficheros cartográficos suelen ser muy complejos y ocupar mucho espacio. MicroStation los maneja sin problemas, y en equipos no especialmente potentes. Baste decir que con

un AMD K6-2/333 con NT 4.0 y 128 Mb de RAM, SiteWorks es capaz de triangular 20.000 puntos (X,Y,Z) en unos 2 segundos.

Existen multitud de aplicaciones que corren bajo MicroStation y permiten realizar MDT:

- **Intergraph SiteWorks:** desde siempre, Intergraph ha desarrollado software de ingeniería para MicroStation (ha sido en los últimos 2 ó 3 años cuando ha portado algunas de sus soluciones también a AutoCAD). El SiteWorks en MicroStation se beneficia de todas las ventajas de éste. Mucha mayor velocidad, aparte de unas capacidades 3D muy superiores a las de AutoCAD. Por lo demás, el manejo es muy similar.

Terrasolid Terramodeler: es una aplicación muy buena, que ocupa un solo disquete y realiza la mayoría de las funciones que hemos comentado. Puede manejar hasta 10 MDT al mismo tiempo (lo cual suele ser suficiente). Hace perfiles, cubicaciones y muchas mas acciones. Tiene una opción muy interesante para crear modelos fotorrealísticos del terreno, basados en la asignación de texturas a los triángulos, para renderizarlos posteriormente. En este sentido, las herramientas de visualización y renderizado de MicroStation son una verdadera maravilla (sombreados Phong, Phong Stereo, Radiosidad, etc...), con lo que podemos obtener resultados impactantes.

- **Geopack Geoterrain:** es otra aplicación muy interesante. Su funcionamiento es parecido a las anteriores. En realidad, una vez que se aprenden los conceptos más importantes, no es demasiado difícil cambiar de aplicación y obtener resultados muy parecidos.

3.2- Aspectos más significativos en la construcción de un MDT.

El continuo progreso en la topografía digital, fotogrametría analítica y digital, cartografía digital, sistemas de información geográfica y sus aplicaciones tecnológicas a través de ordenadores cada vez más potentes, han facilitado el creciente uso de los modelos digitales del terreno (MDT) en la planificación y diseño en la ingeniería.

En 1958, C.L. Miller y Laflame del Instituto Tecnológico de Massachusetts, concibieron y crearon las bases para el desarrollo del MDT. Para lograr mayor eficiencia en la digitalización y ampliar las posibilidades de su empleo se han realizado por varios países numerosas investigaciones.

Los aspectos más significativos a considerar en la confección y desarrollo del MDT, son los siguientes:

- Adquisición de los datos.
- Densidad de la digitalización.
- Procesamiento de los datos.
- Métodos de interpolación.
- Precisión de las mediciones.
- Precisión de los resultados.
- Aplicaciones posibles.

Entre los aspectos citados, la adquisición de los datos, su densidad y el método de interpolación utilizados, tienen una gran importancia en el resultado final, Bada (1984).

Los mapas son la versión analógica de los MDT y pueden ser denominados, por tanto, modelos analógicos del terreno, MAT. Ambos tipos de modelos se complementan y no es previsible la total sustitución de unos por los otros.

Algunas ventajas importantes de los MDT sobre los MAT son

- la posibilidad de tratamiento numérico de los datos
- la posibilidad de realizar simulación de procesos, emulando el funcionamiento de un sistema dinámico real

Su mayor problema es que el manejo de los MDT es complejo:

- necesita equipos informáticos que obligan a un entrenamiento especializado
- la interpretación de la información es indirecta
- la elaboración de modelos derivados requiere el dominio de lenguajes de programación o la intervención de especialistas

Asimismo, un uso eficaz de los MDT no se concibe fácilmente sin un equipo de trabajo relativamente amplio, un equipo informático sofisticado y un conjunto de circunstancias que permita unas condiciones de trabajo con una razonable

estabilidad. En la práctica, las posibilidades de trabajo e investigación que los SIG/MDT permiten se ven limitadas por las también exigencias económicas y estratégicas que plantean.

Se puede encontrar también el término MDE, significa Modelo Digital de Elevaciones y según CursoMDT.html(2000), Un MDE no es más que una estructura numérica de datos que representan la distribución espacial de la altitud de la superficie del terreno.

Un terreno real puede describirse de forma genérica como una función bivariable continua:

Donde z representa la altitud del terreno en el punto de coordenadas (x,y) y ϕ es una función que relaciona las variables con su localización geográfica.

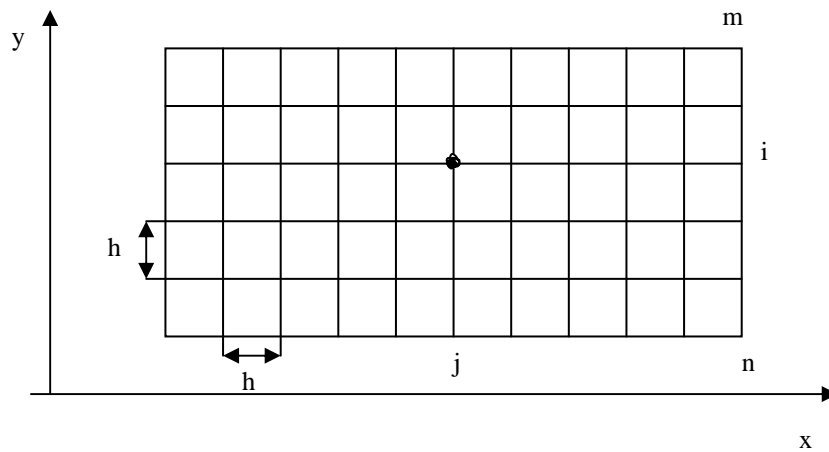
En un MDE se aplica la función anterior sobre un dominio espacial concreto D , en consecuencia, un MDE puede escribirse genéricamente como $MDE=(D, \phi)$.

En la práctica, la función no es continua sino que se resuelve a intervalos discretos, por lo que el MDE está compuesto por un conjunto finito y explícito de elementos.

3.3- Modelo digital del terreno usando polinomios de Lagrange.

El problema de esta investigación consiste en la necesidad de automatizar la determinación de cotas para elevar la eficiencia y la eficacia en las aplicaciones forestales que dependen de esta variable.

Parece justo que el uso del MDT sea una vía adecuada para ello, por lo que en esta investigación se construyen MDT usando polinomios de interpolación de dos variables llamados polinomios de Lagrange, teniendo en cuenta la interpolación segmentaria y las redes rectangulares regulares para definir nuestro modelo.



Dentro de los modelos considerados tenemos tres casos que son:

- MDT usando polinomios bilineales.
- MDT usando polinomios bicuadráticos.
- MDT usando polinomios bicúbicos.

Todos estos polinomios son casos particulares del polinomio interpolador de Lagrange de dos variables, de cada uno de ellos se derivan dos casos; el primero se trata de las funciones de interpolación definidas sobre la red rectangular regular obtenida directamente del relieve (**fig 3.1**) y el segundo es definida sobre la red rectangular regular redensificada con el uso de funciones spline cubico natural. Es importante señalar que la matriz regulares la estructura mas utilizada para construir los MDT debido a su cómodo manejo informático y simplicidad estructural CursoMDT.html(2000).

El método a seguir para la redensificación de la red rectangular regular obtenida del relieve de interés, consiste en interpolar con funciones spline cúbico natural todos los perfiles veamos el procedimiento:

En primer lugar consideremos como variable independiente la x , teniendo los puntos de interpolación la forma $(j, f_{(j)})_i$; $(i=0, 1, 2, \dots, m-1, m \text{ y } j=0, 1, 2, \dots, n-1, n)$, posteriormente se evalúan las funciones spline obtenidas en cada perfil en puntos $(j, f_{(j)})_i$; $(j=0, 0.1, 0.2, \dots, 10(n-1), 10n \text{ e } i=0, 1, 2, \dots, m-1, m)$ mas tarde se hace lo mismo pero considerando como variable independiente la y tomando ahora como puntos de interpolación $(i, f_{(i)})_j$; $(i=0, 1, 2, \dots, m-1, m \text{ y } j=0, 0.1, 0.2, \dots, 10(n-1), 10n)$, si ahora procedemos a interpolar en las $10n$ funciones spline cúbico natural los puntos $(i, f_{(i)})_j$; $(i=0.1, 0.2, 0.3, \dots, 10(m-1), 10m)$ resultara una matriz del tipo $[(m+1) \times (n+1)]$. Que es la matriz

redensificada. El proceso de redensificación descrito se efectúa con un programa en Matlab dando la opción de hacer la redensificación tan densa como se desee en nuestro caso hemos decidido como se describe hacerla cada 0.1.

- MDT usando polinomio bilineal.

Como se comentó el dominio de definición para las funciones de interpolación usadas en nuestros modelos, son redes o mallas rectangulares regulares de las que conocemos las coordenadas espaciales de todos sus nodos (i, j) con :

$(i=0, 1, 2, 3, \dots, (m-1), m)$ y $j=0, 1, 2, 3, \dots, (n-1), n)$, estas coordenadas en todos los casos se tomaron de un mapa topográfico del sistema de coordenadas Cuba norte escala 1/10 000 y con curvas de nivel a intervalos de 5m, haciendo la lectura de las coordenadas sobre el mapa topográfico cada 50m o sea 0.5cm lo que significa que en un kilómetro cuadrado se obtienen 400 nodos. También todos los modelos fueron evaluados en tres tipos de relieve llano, ondulado y montañoso para hacer una evaluación de su comportamiento en cada caso.

En el caso del modelo bilineal los subconjuntos tomados para la interpolación segmentaria son cuadrículas de cuatro nodos, por lo que al interpolar con el polinomio de Lagrange las ecuaciones obtenidas sobre cada subconjunto son funciones bilineales de la forma:

$$Z(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$$

Este tipo de polinomio fue el mismo usado por (Tchikoué 1996) el que para buscar los coeficientes formó un sistema de ecuaciones de cuatro incógnitas con cuatro variables, en nuestro caso obtenemos la función mediante el polinomio de Lagrange para cuatro puntos lo que favorece el tiempo de cómputo sobre todo cuando la matriz es redensificada y además al aumentar la cantidad de nodos (nueve y dieciséis), los sistemas a resolver son muy grandes y eso influiría mucho en el tiempo empleado por el ordenador.

En este ejemplo se ilustra como la diferencia de tiempo de cálculo entre el método usado por Tchikoué y el empleo de los polinomios de Lagrange es notable cuando queremos interpolar sobre una matriz del orden **(201x201)**.

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

[z] = evalua (A0,A1,A2,A3,1,1,187420 ,268730)

z = 122.7095

Tiempo de computo **(16.6)''**

Aplicando el polinomio interpolador de Lagrange:

[z] = bili (187420,268730)

z = 122.7095

Tiempo de computo **(0.8)''**

(Lloyd P. 1985), (Coffi A. 1986) y (Notario 1988) emplearon respectivamente en sus modelos planos de la forma: $Ax + By + Cz = D$, su ecuación se obtenía de igual forma que Tchikoué con cuatro puntos, sin dudas el plano es una superficie sencilla pero muy rígida y el polinomio bilineal lo supera en alguna flexibilidad.

Una superficie plana interceptada con cualquier otro plano siempre resultara una recta, sin embargo la superficie bilineal no siempre se comporta así, hay casos que al interceptarlas con algún tipo de planos resulta una curva correspondiente a una parábola, este pequeño detalle la marca una diferencia entre un plano y una superficie bilineal en cuanto a su comportamiento, por ejemplo:

Si se interceptan las ecuaciones $Z(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$ y el plano $y=x$ resulta la curva $Z(x) = a_0 + a_1x + a_2x + a_3x^2$ lo que precisamente es una parábola.

Como se ha comentado, el MDT que usa como función de interpolación el polinomio bilineal se define sobre una matriz tomada del relieve de orden

(m, n) y otra matriz que es la redensificada de orden (10m+1 , 10n+1), en los dos casos se puede calcular con rapidez la cota de algún punto que este en el dominio de definición de interpolación, también es posible representar la superficie en estudio en tres dimensiones y hacer una plantilla de isocotas (curvas de nivel). La redensificación se hace con el objetivo de suavizar tanto el relieve como las isocotas lo que puede implicar una mejor precisión.

Veamos el comportamiento gráfico en los distintos relieves, se observará como los gráficos de la superficie y el de curvas de nivel sobre la matriz redensificada toman una mayor suavidad, acercándose mas a al comportamiento real del relieve.

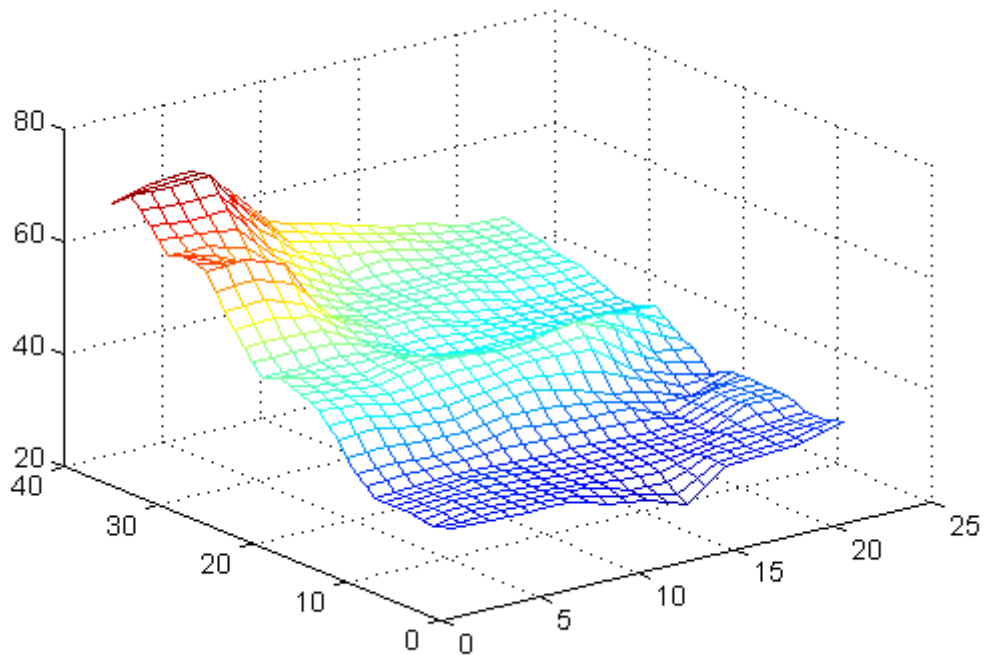


Fig 3.2 Relieve llano sobre la matriz sin redensificar.

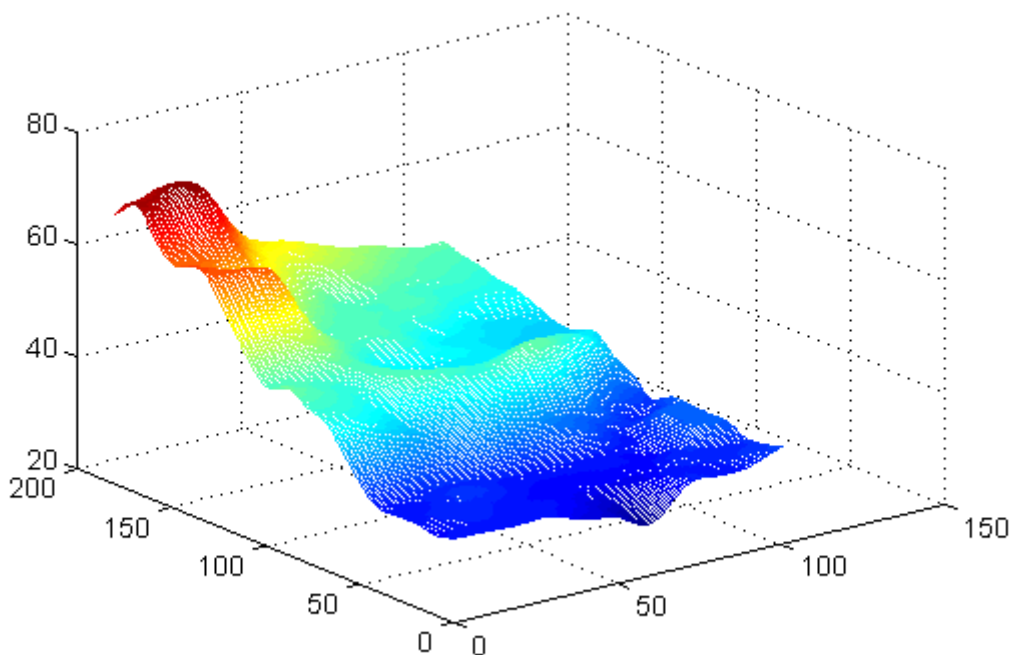


Fig. 3.3 Relieve llano sobre la matriz redensificada.

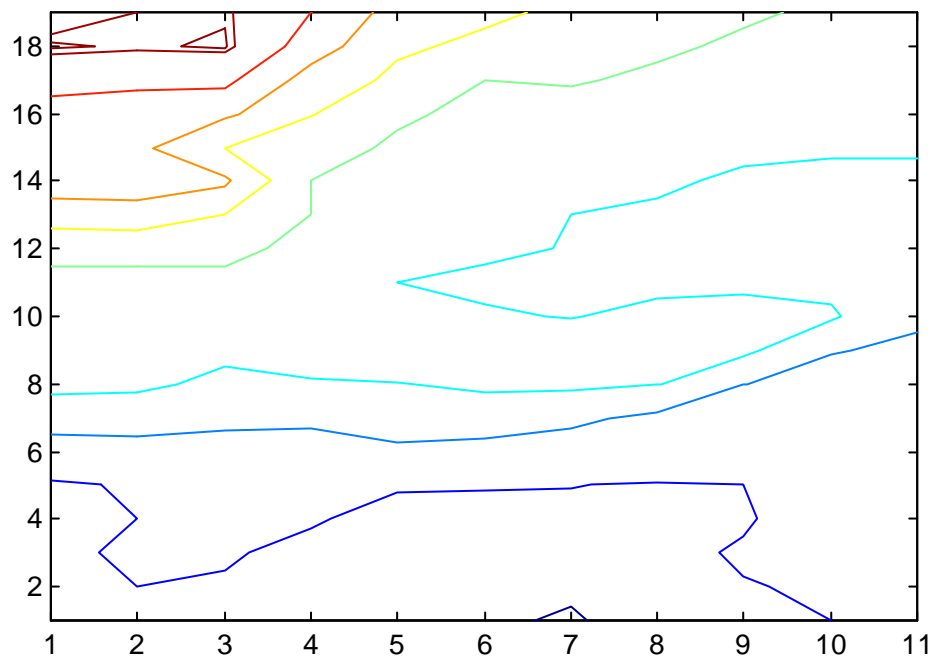


Fig. 3.4 Líneas de nivel sobre relieve llano sin redensificar la matriz.

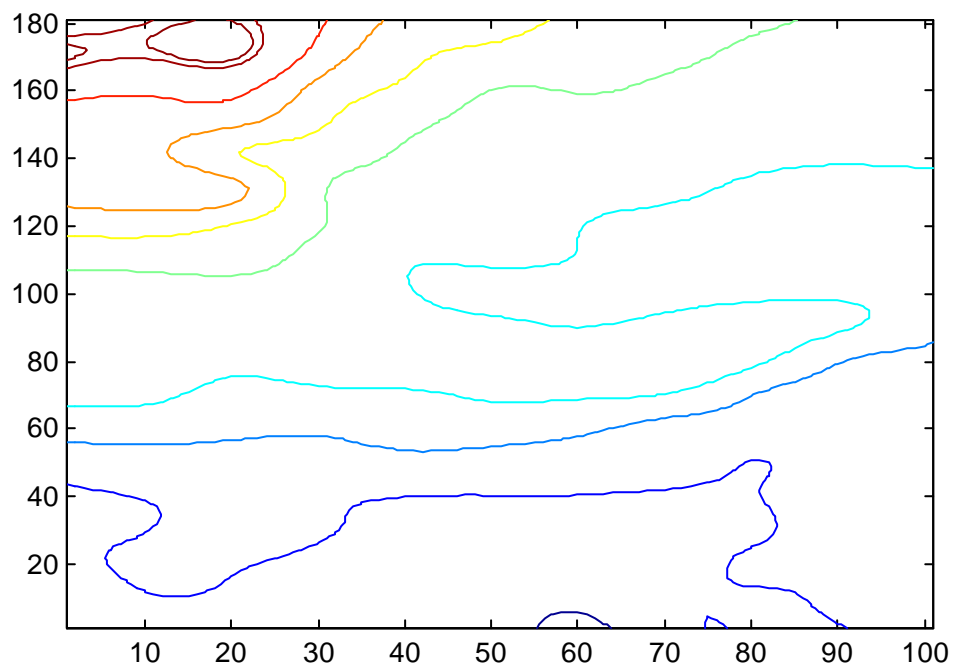


Fig. 3.5 Curvas de nivel relieve llano sobre matriz redensificada.

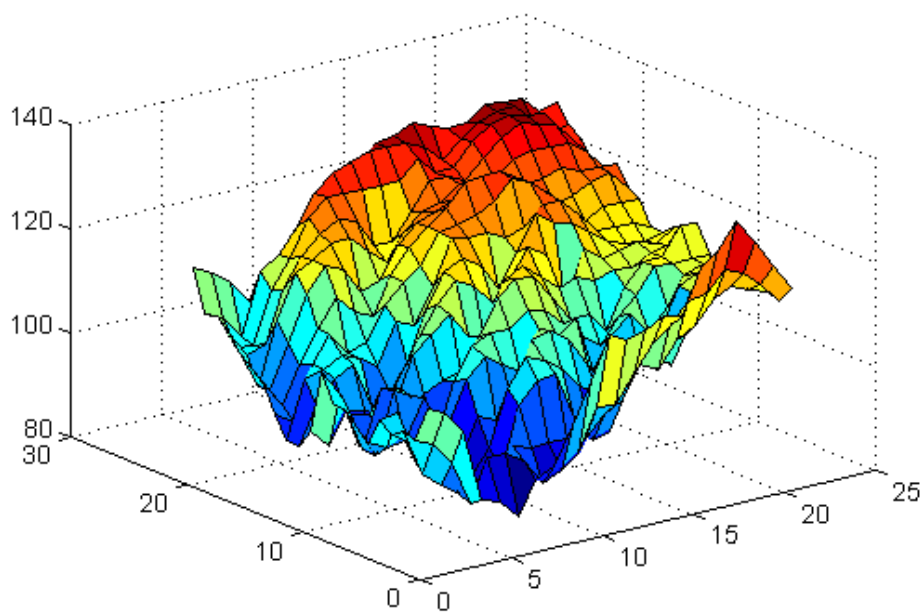


Fig 3.6 Relieve ondulado sobre la matriz sin redensificar.

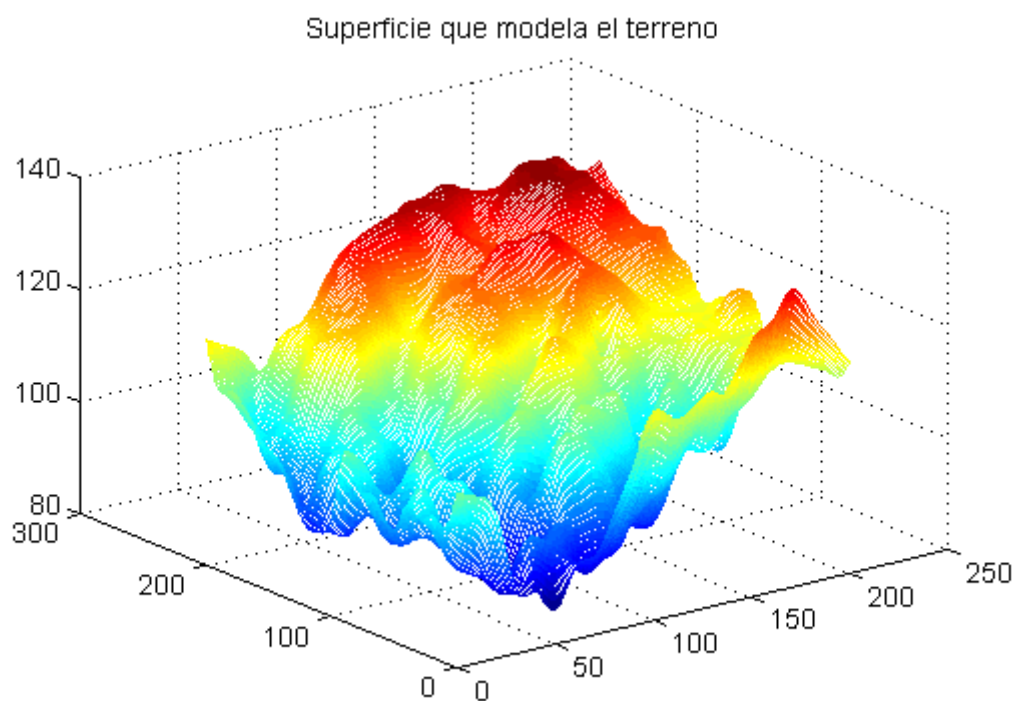


Fig 3.7 Relieve ondulado sobre la matriz redensificada.

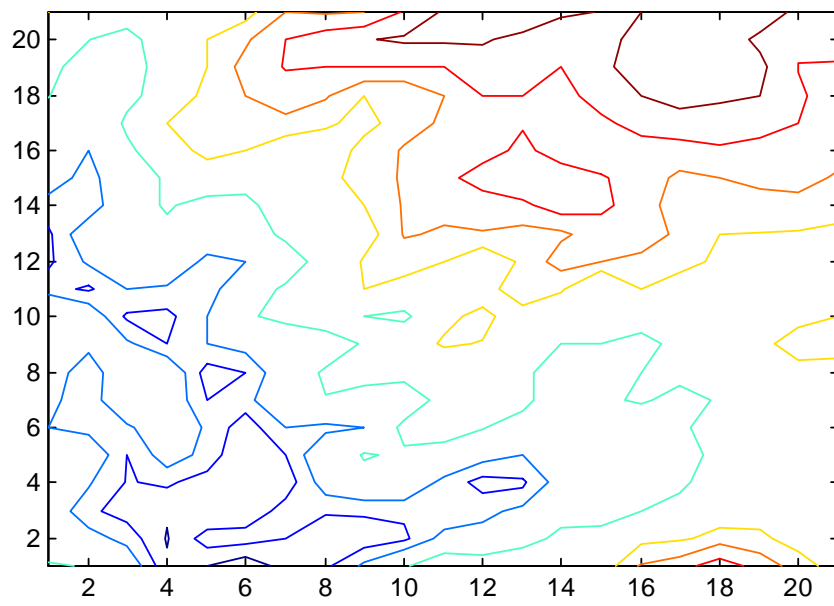


Fig. 3.8 Líneas de nivel sobre relieve ondulado sin redensificar la matriz.

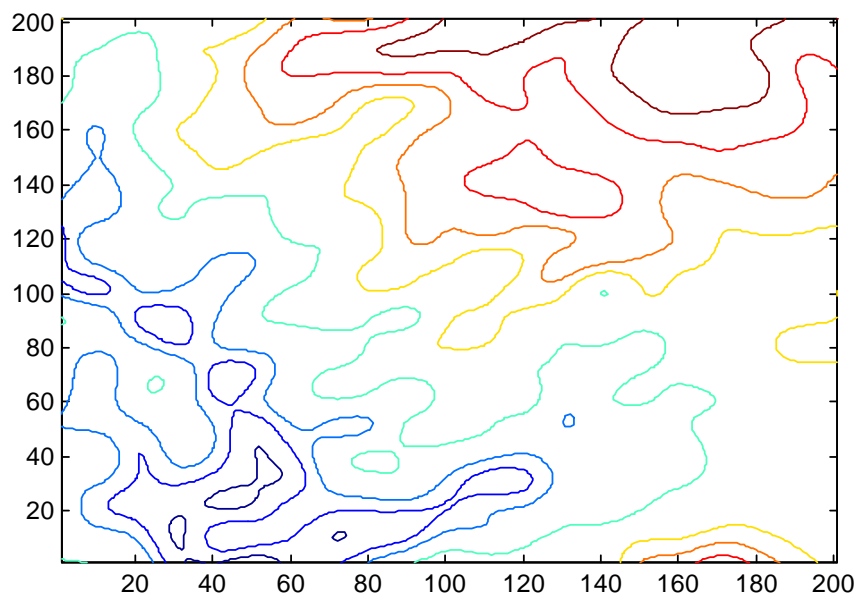


Fig. 3.9 Curvas de nivel relieve ondulado sobre matriz redensificada.

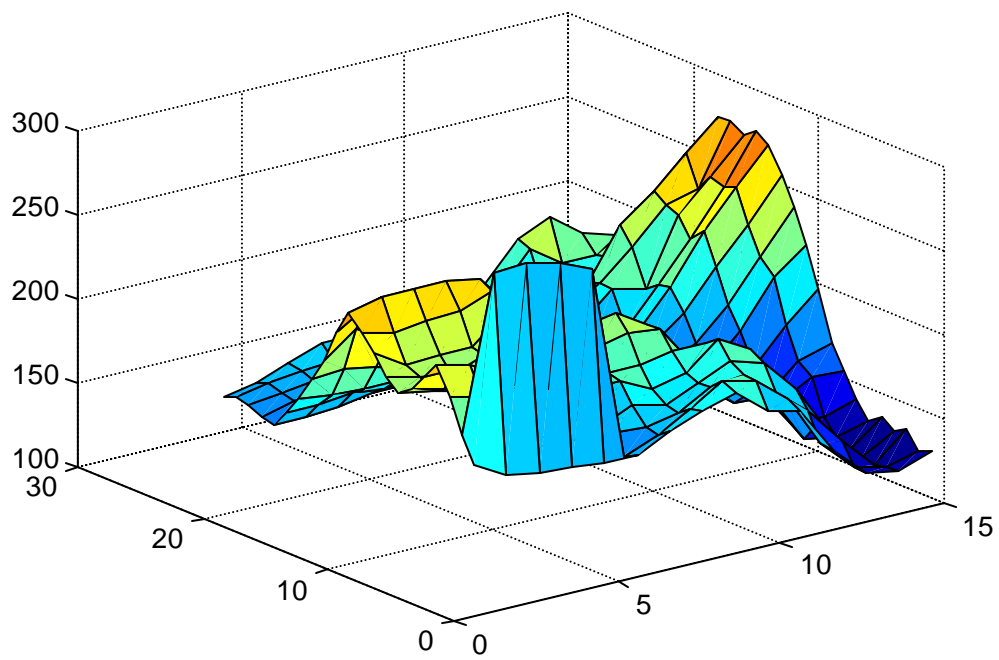


Fig 3.10 Relieve montañoso sobre la matriz sin redensificar.

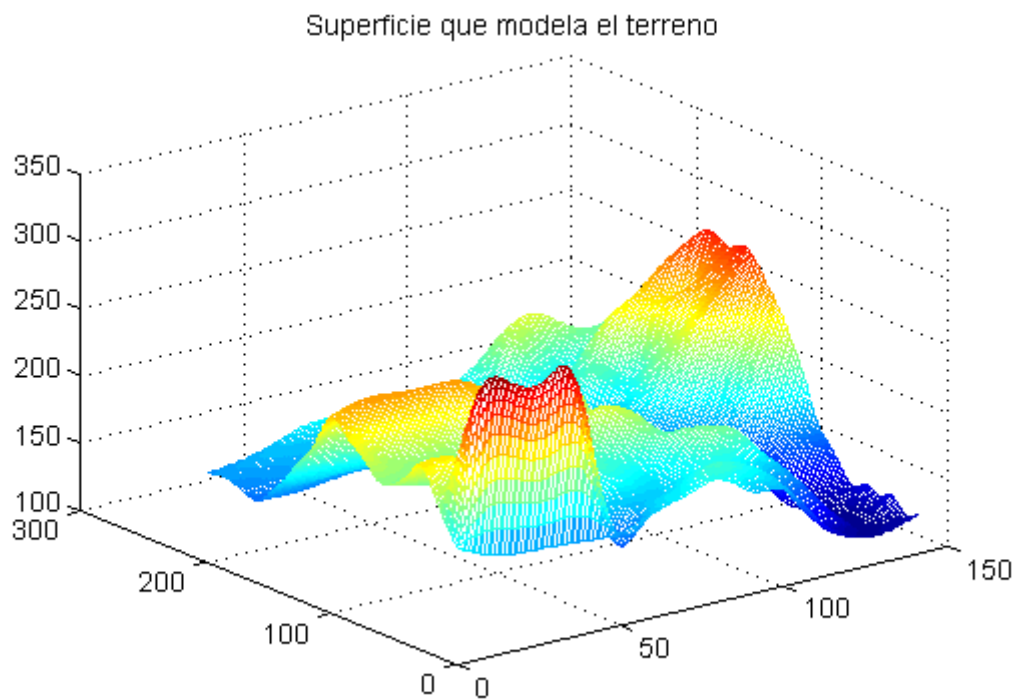


Fig 3.11 Relieve montañoso sobre la matriz redensificada.

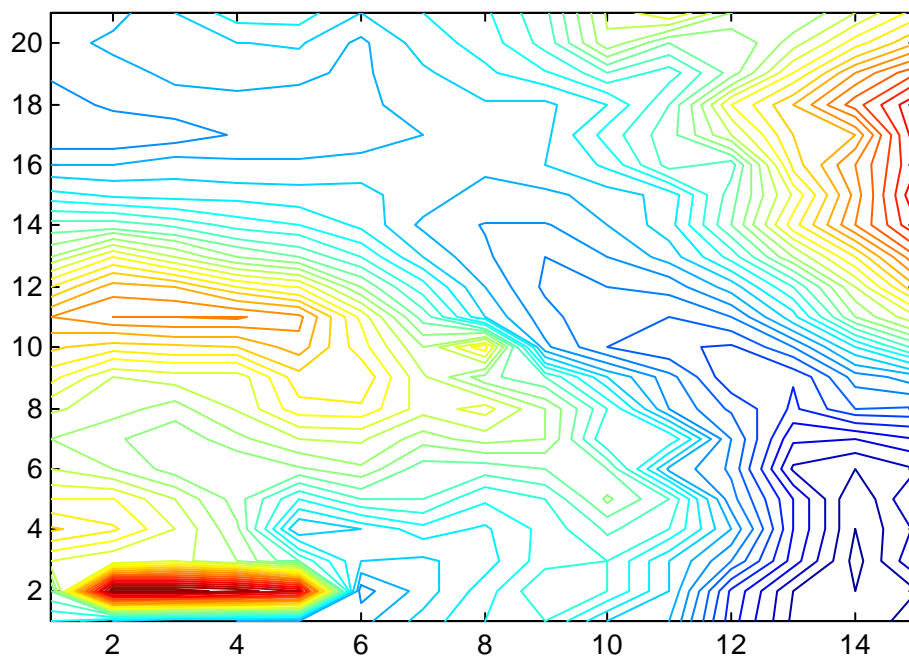


Fig. 3.12 Curvas de nivel relieve montañoso sobre matriz no redensificada.

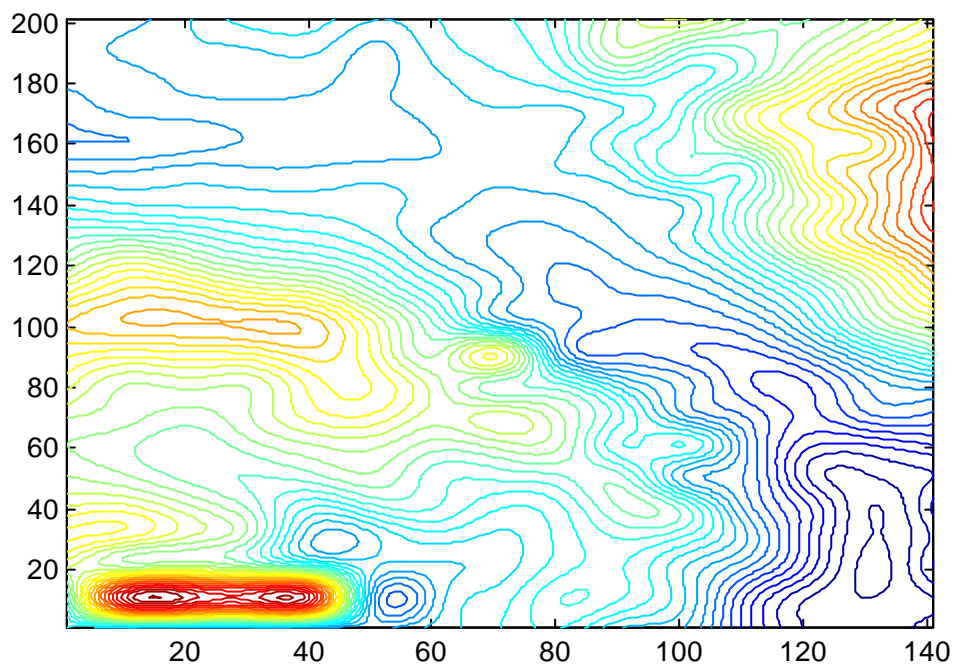


Fig. 3.13 Curvas de nivel relieve montañoso sobre matriz redensificada.

Se puede ver sobre las matrices no redensificadas el relieve queda conformado de forma menos suave que en la representación del relieve sobre la matriz redensificada lo mismo ocurre con la plasticidad de la curva en la representación de las isocotas.

Los MDT se evaluaron en los tres tipos de relieve y en cada uno de ellos se analizaron los errores y equivocaciones cometidos contra una base de datos relativos a los (puntos destacado) que no son mas que puntos aislados que aparecen en los mapas con sus cotas registradas, estos se complementaron con algunos que se tomaron sobre las curvas de nivel, en las tablas y gráficos que a continuación se presentan, se reflejan los resultados.

Relieve Llano						
Coordenadas		Cotas del mapa (Z)	Cotas calculadas		ΔZ	
X	Y		Matriz no densificada Z_1	Matriz densificada Z_2	Z_1-Z	Z_2-Z
186700	270110	34.00	34.06	34.80	0.0600	0.8000
186630	270200	36.00	35.54	35.42	-0.4600	-0.5800
186970	270050	36.00	35.74	35.14	-0.2600	-0.8600
186720	270420	48.00	46.89	46.06	-1.1100	-1.9400
186750	270380	47.00	46.52	46.83	-0.4800	-0.1700
186860	270400	49.00	48.40	48.84	-0.6000	-0.1600
186720	270610	43.00	47.61	47.82	4.6100	4.8200
186530	270650	63.00	63.04	63.03	0.0400	0.0300
186920	270840	49.00	48.57	48.42	-0.4300	-0.5800
186580	270870	72.00	70.06	71.83	-1.9400	-0.1700
186530	270040	35.00	34.62	34.66	-0.3800	-0.3400
186540	270270	40.00	39.80	39.84	-0.2000	-0.1600
186930	270370	40.00	41.31	39.66	1.3100	-0.3400
186940	270070	35.00	35.38	35.27	0.3800	0.2700
186820	270060	31.50	32.89	32.87	1.3900	1.3700
186830	270370	49.00	46.67	47.92	-2.3300	-1.0800
186740	270470	45.00	45.10	44.77	0.1000	-0.2300
186640	270560	50.00	49.34	49.40	-0.6600	-0.6000

186620	270860	70.00	67.74	68.84	-2.2600	-1.1600
186580	270780	65.00	64.36	65.16	-0.6400	0.1600
186960	270950	50.00	48.64	48.82	-1.3600	-1.1800
186770	270670	47.50	47.46	47.70	-0.0400	0.2000
186880	270270	37.50	38.49	38.48	0.9900	0.9800
186770	270580	47.50	46.09	46.36	-1.4100	-1.1400
186700	270740	50.00	50.60	50.48	0.6000	0.4800
186570	270920	70.00	70.50	70.68	0.5000	0.6800
186520	270980	75.00	69.6	70.01	-5.4000	-4.9900
186640	270370	45.00	45.52	46.14	0.5200	1.1400
186920	270230	35.00	36.00	37.23	1.0000	2.2300
186700	270260	40.00	39.70	39.83	-0.3000	-0.1700

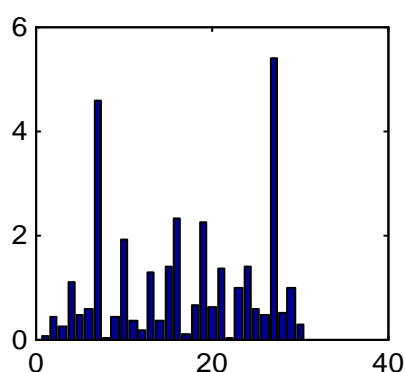


Fig. 3.14 Representación gráfica del módulo error absoluto obtenido con la matriz sin redensificar.

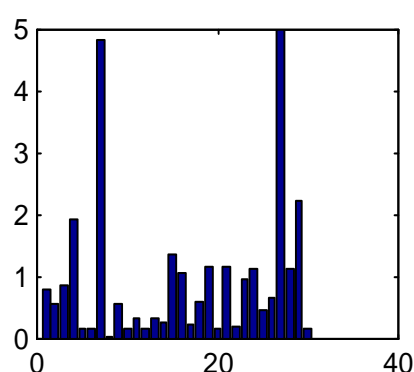


Fig. 3.15 Representación gráfica del módulo del error absoluto obtenido con la matriz redensificada.

En la **Fig. (3.14-3.15)** se puede apreciar los gráficos de barras en los que se destacan la zona de mayor diferencia entre las cotas del mapa y calculadas, con esto podemos tratar de mejorar la adquisición de los datos en la cercanía de los puntos que se encuentran en los intervalos de mayor diferencia este tratamiento se seguirá en todo el análisis restante.

Relieve Ondulado						
Coordenadas		Cotas del mapa (Z)	Cotas calculadas		ΔZ	
X	Y		Matriz no densificada Z_1	Matriz densificada Z_2	Z_1-Z	Z_2-Z
187440	268720	125	123.7	122.8	-1.3000	-2.2000
187590	268770	129.5	129	128.1	-0.5000	-1.4000

187430	268530	123	119.9	120.5	-3.1000	-2.5000
187390	268800	116.5	119.8	120.6	3.3000	4.1000
187880	268530	118	118.3	118.2	0.3000	0.2000
187640	268690	133.5	131.4	129.8	-2.1000	-3.7000
187880	268780	133.5	130.1	129.7	-3.4000	-3.8000
187740	268160	108.5	107	106.5	-1.5000	-2.0000
187240	268610	107.5	105.5	105.9	-2.0000	-1.6000
187030	268920	107.5	110.6	108	3.1000	0.5000
187050	268820	101	104.3	100.1	3.3000	-0.9000
187550	268440	122	120.3	120	-1.7000	-2.0000
187570	268960	136	135.2	135.4	-0.8000	-0.6000
187840	268910	138.5	137.4	137.6	-1.1000	-0.9000
187070	268000	109	109.9	109.4	0.9000	0.4000
187920	268100	118.5	117.2	117.5	-1.3000	-1.0000
187570	268140	92	95.6	98.6	3.6000	6.6000
187440	268210	113.5	108.93	110.5	-4.5700	-3.0000
187080	268610	103	104.64	98.8	1.6400	-4.2000
187600	268560	121.5	121.4	120.9	-0.1000	-0.6000
187360	268000	94.5	95.4	94	0.9000	-0.5000
187300	268100	98	97.2	97.2	-0.8000	-0.8000
187570	268140	92	94.6	98.6	2.6000	6.6000
187390	268090	96.5	96	90	-0.5000	-6.5000
187180	268650	112	109.6	106.6	-2.4000	-5.4000
187340	268920	132	130.4	130.4	-1.6000	-1.6000
187220	268050	101	97.5	97.7	-3.5000	-3.3000
187120	268300	109	107.1	107.8	-1.9000	-1.2000
187620	268310	109	110.75	112.8	1.7500	3.8000
187650	268860	128.5	128.7	128.5	0.2000	0

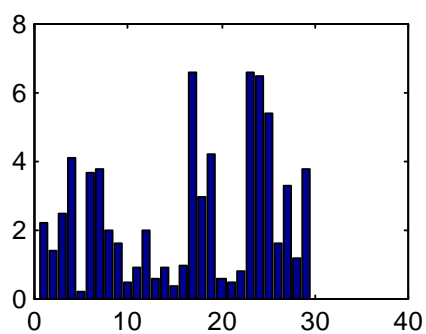


Fig. 3.16 Representación gráfica del módulo del error absoluto obtenido con la matriz redensificada.

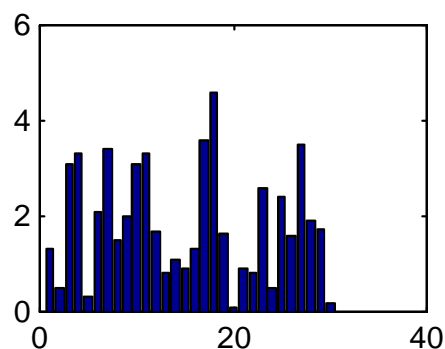


Fig. 3.17 Representación gráfica del módulo error absoluto obtenido con la matriz sin redensificar.

Relieve Montañoso			
Coordenadas	Cotas	Cotas calculadas	ΔZ

X	Y	del Mapa (Z)	Matriz no densificada Z₁	Matriz densificada Z₂	Z₁-Z	Z₂-Z
190070	268300	203.5	205	203.2	1.5000	0.3000
190100	268500	253.5	250	250	-3.5000	-3.5000
190150	268840	168.5	165.4	165.9	-3.1000	-2.6000
190240	268730	178.5	175.3	175.1	-3.2000	-3.4000
190080	268950	174	172.4	173.3	-1.6000	-0.7000
190100	268520	253.5	248	249.2	-5.5000	-4.3000
190360	268340	223	212.2	223.1	-10.8000	0.1000
190430	268130	192	188.9	191.7	-3.1000	-0.3000
190430	268060	198	193	194.2	-5.0000	-3.8000
190530	268440	149.5	154.5	148.5	5.0000	-1.0000
190430	268230	198	196.4	204.3	-1.6000	6.3000
190430	268540	158	159.6	158.8	1.6000	0.8000
190480	268710	178.5	175.1	176.8	-3.4000	-1.7000
190320	268750	171	171.1	170.6	0.1000	-0.4000
190160	268950	175	174.9	171.3	-0.1000	-3.7000
190060	268430	225	220.3	223.6	-4.7000	-1.4000
190170	268730	175	175.8	174.7	0.8000	-0.3000
190220	268770	170	170.3	168.8	0.3000	-1.2000
190670	268700	250	252.6	258.1	2.6000	8.1000
190230	268225	200	192.4	198.8	-7.6000	-1.2000
190320	268250	195	197	195.6	2.0000	0.6000
190250	268340	225	221.2	226.5	-3.8000	1.5000
190690	268610	250	241.8	253.2	-8.2000	3.2000
190570	268805	225	221.25	231.1	-3.7500	6.1000
190320	268880	175	173.25	175.1	-1.7500	0.1000
190040	268500	250	247	249.4	-3.0000	-0.6000
190500	268640	175	174.4	177.9	-0.6000	2.9000
190340	268320	220	211.5	218.7	-8.5000	-1.3000
190340	268030	180	179	182.6	-1.0000	2.6000
190070	268120	225	218.1	213.4	-6.9000	-11.6000

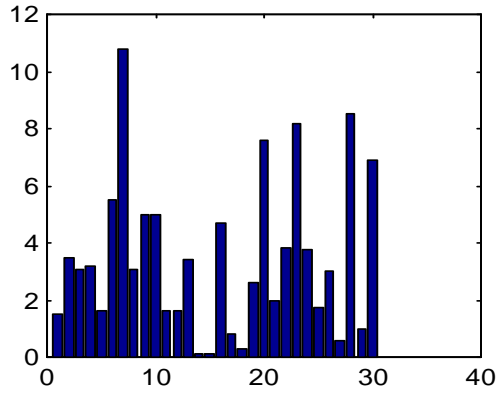


Fig. 3.18 Representación gráfica del módulo error absoluto obtenido con la matriz no densificada.

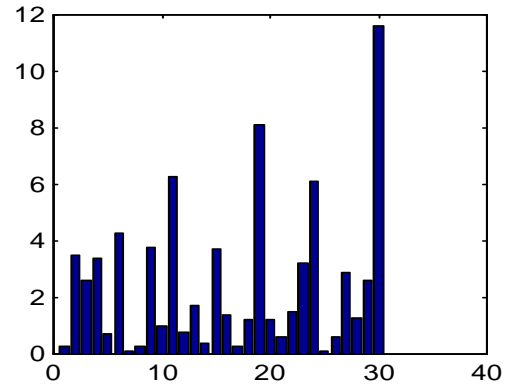


Fig. 3.19 Representación gráfica del módulo error absoluto obtenido con la matriz redensificada.

- MDT usando polinomio bicuadrático.

Para el modelo bicuadrático los subconjuntos tomados para la interpolación segmentaria son cuadrículas de nueve nodos, por lo que al interpolar con el polinomio de Lagrange las ecuaciones obtenidas sobre cada subconjunto son funciones bicuadráticas de la forma:

$$Z(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6yx^2 + a_7xy^2 + a_8x^2y^2 \quad (3.3)$$

Es importante resaltar que esta superficie al interceptarse con los planos paralelos a los planos coordenados resultan curvas parabólicas, no como el caso de los planos y los polinomios bilineales que su intersección son rectas.

Resultados del cálculo con el MDT bicuadrático.

Relieve Llano						
Coordenadas		Cotas del mapa (Z)	Cotas calculadas		ΔZ	
X	Y		Matriz no densificada Z_1	Matriz densificada Z_2	Z_1-Z	Z_2-Z
186700	270110	34.00	34.01	34.00	0.0100	0
186630	270200	36.00	35.56	34.67	-0.4400	-1.3300
186970	270050	36.00	35.75	35.78	-0.2500	-0.2200
186720	270420	48.00	46.84	47.21	-1.1600	-0.7900
186750	270380	47.00	46.75	46.83	-0.2500	-0.1700
186860	270400	49.00	48.76	48.84	-0.2400	-0.1600

186720	270610	43.00	47.86	47.82	4.8600	4.8200
186530	270650	63.00	63.38	63.03	0.3800	0.0300
186920	270840	49.00	48.49	48.42	-0.5100	-0.5800
186580	270870	72.00	71.19	71.83	-0.8100	-0.1700
186530	270040	35.00	34.70	34.66	-0.3000	-0.3400
186540	270270	40.00	39.65	39.83	-0.3500	-0.1700
186930	270370	40.00	39.79	39.66	-0.2100	-0.3400
186940	270070	35.00	35.43	35.27	0.4300	0.2700
186820	270060	31.50	33.19	32.87	1.6900	1.3700
186830	270370	49.00	47.62	47.92	-1.3800	-1.0800
186740	270470	45.00	45.07	44.77	0.0700	-0.2300
186640	270560	50.00	49.16	49.40	-0.8400	-0.6000
186620	270860	70.00	67.98	68.84	-2.0200	-1.1600
186580	270780	65.00	64.36	65.16	-0.6400	0.1600
186960	270950	50.00	50.64	48.17	0.6400	-1.8300
186770	270670	47.50	47.70	47.70	0.2000	0.2000
186880	270270	37.50	36.88	36.49	-0.6200	-1.0100
186770	270580	47.50	36.39	46.36	-11.110	-1.1400
186700	270740	50.00	50.52	50.48	0.5200	0.4800
186570	270920	70.00	68.37	68.70	-1.6300	-1.3000
186520	270980	75.00	70.37	70.01	-4.6300	-4.9900
186640	270370	45.00	45.64	45.66	0.6400	0.6600
186920	270230	35.00	36.32	35.79	1.3200	0.7900
186700	270260	40.00	39.72	39.83	-0.2800	-0.1700

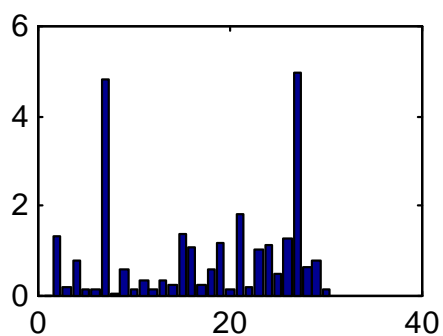


Fig. 3.20 Representación gráfica del módulo error absoluto obtenido con la matriz redensificada.

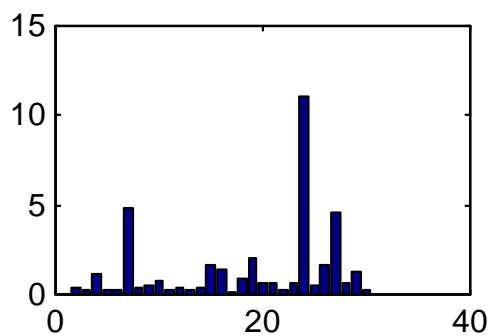


Fig. 3.21 Representación gráfica del módulo error absoluto obtenido con la matriz no densificada.

Relieve Ondulado			
Coordenadas	Cotas	Cotas calculadas	ΔZ

X	Y	del mapa (Z)	Matriz no densificada Z_1	Matriz densificada Z_2	Z_1-Z	Z_2-Z
187440	268720	125	125.35	125.29	0.3500	0.2900
187590	268770	129.5	129.63	129.96	0.1300	0.4600
187430	268530	123	121.21	122.32	-1.7900	-0.6800
187390	268800	116.5	118.58	118.02	2.0800	1.5200
187880	268530	118	117.97	118.41	-0.0300	0.4100
187640	268690	133.5	133.59	133.75	0.0900	0.2500
187880	268780	133.5	131.00	131.03	-2.5000	-2.4700
187740	268160	108.5	107.92	108.32	-0.5800	-0.1800
187240	268610	107.5	104.18	104.34	-3.3200	-3.1600
187030	268920	107.5	108.57	108.92	1.0700	1.4200
187050	268820	101	102.54	101.93	1.5400	0.9300
187550	268440	122	121.10	121.10	-0.9000	-0.9000
187570	268960	136	135.33	135.59	-0.6700	-0.4100
187840	268910	138.5	137.28	137.05	-1.2200	-1.4500
187070	268000	109	108.10	108.86	-0.9000	-0.1400
187920	268100	118.5	116.84	117.05	-1.6600	-1.4500
187570	268140	92	92.77	92.90	0.7700	0.9000
187440	268210	113.5	110.13	109.73	-3.3700	-3.7700
187080	268610	103	105.04	105.41	2.0400	2.4100
187600	268560	121.5	121.10	120.85	-0.4000	-0.6500
187360	268000	94.5	94.96	94.86	0.4600	0.3600
187300	268100	98	95.00	97.2	-3.0000	-0.8000
187570	268140	92	92.77	92.91	0.7700	0.9100
187390	268090	96.5	93.81	94.13	-2.6900	-2.3700
187180	268650	112	109.39	108.33	-2.6100	-3.6700
187340	268920	132	132.28	131.87	0.2800	-0.1300
187220	268050	101	97.74	98.62	-3.2600	-2.3800
187120	268300	109	107.72	109	-1.2800	0
187620	268310	109	107.13	109.40	-1.8700	0.4000
187650	268860	128.5	128.8	128.87	0.3000	0.3700

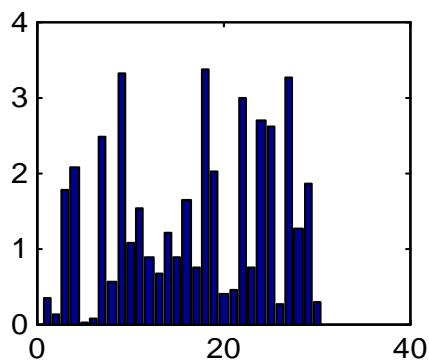


Fig. 3.22 Representación gráfica del módulo error absoluto obtenido con la matriz no densificada.

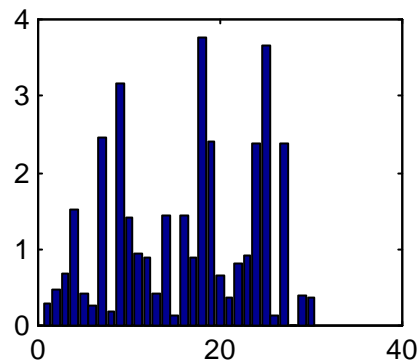


Fig. 3.23 Representación gráfica del módulo error absoluto obtenido con la matriz redensificada.

Relieve Montañoso						
Coordenadas		Cotas del mapa (Z)	Cotas calculadas		ΔZ	
X	Y		Matriz no densificada Z_1	Matriz densificada Z_2	Z_1-Z	Z_2-Z
190070	268300	203.5	204.12	203.20	0.6200	-0.3000
190100	268500	253.5	250.00	250.00	-3.5000	-3.5000
190150	268840	168.5	167.86	167.56	-0.6400	-0.9400
190240	268730	178.5	174.87	175.08	-3.6300	-3.4200
190080	268950	174	173.10	173.31	-0.9000	-0.6900
190100	268520	253.5	247.80	249.20	-5.7000	-4.3000
190360	268340	223	221.59	223.14	-1.4100	0.1400
190430	268130	192	192.33	191.74	0.3300	-0.2600
190430	268060	198	194.04	194.20	-3.9600	-3.8000
190530	268440	149.5	147.86	148.54	-1.6400	-0.9600
190430	268230	198	204.95	204.31	6.9500	6.3100
190430	268540	158	158.86	158.81	0.8600	0.8100
190480	268710	178.5	178.83	176.85	0.3300	-1.6500
190320	268750	171	170.78	170.61	-0.2200	-0.3900
190160	268950	175	174.98	175.36	-0.0200	0.3600
190060	268430	225	224.76	223.64	-0.2400	-1.3600
190170	268730	175	173.38	173.36	-1.6200	-1.6400
190220	268770	170	169.70	168.25	-0.3000	-1.7500
190670	268700	250	257.96	258.10	7.9600	8.1000
190230	268225	200	201.76	200.84	1.7600	0.8400
190320	268250	195	196.70	195.57	1.7000	0.5700
190250	268340	225	227.04	226.47	2.0400	1.4700
190690	268610	250	253.99	253.16	3.9900	3.1600
190570	268805	225	231.82	232.23	6.8200	7.2300
190320	268880	175	175.01	175.09	0.0100	0.0900
190040	268500	250	249.40	249.39	-0.6000	-0.6100
190500	268640	175	177.36	177.93	2.3600	2.9300
190340	268320	220	219.65	218.71	-0.3500	-1.2900
190340	268030	180	181.67	182.58	1.6700	2.5800
190070	268120	225	221.95	208.40	-3.0500	-16.6000

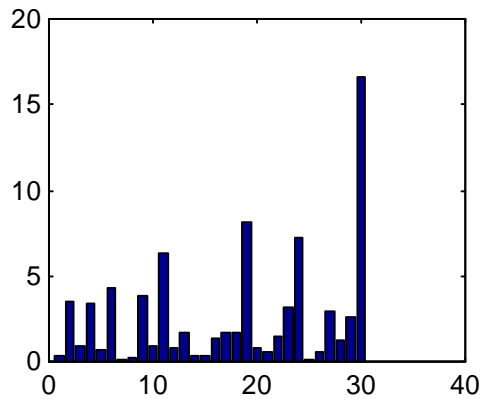


Fig. 3.24 Representación gráfica del módulo error absoluto obtenido con la matriz redensificada.

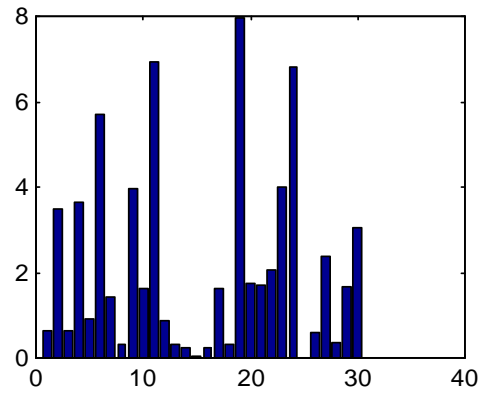


Fig. 3.25 Representación gráfica del módulo error absoluto obtenido con la matriz no densificada.

- MDT usando polinomio bicúbico.

Para el modelo, empleando funciones bicúbicas se tomaron cuadrículas de dieciséis nodos para la interpolación segmentaria, por lo que al interpolar con el polinomio de Lagrange las ecuaciones obtenidas sobre cada subconjunto, son funciones bicúbicas de la forma:

$$Z(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6yx^2 + a_7xy^2 + a_8x^2y^2 + a_9x^3 + a_{10}y^3 + a_{11}xy^3 + a_{12}yx^3 + a_{13}x^2y^3 + a_{14}y^2x^3 + a_{15}x^3y^3 \quad (3.4)$$

Esta superficie al interceptarse con los planos paralelos a los planos coordenados origina un polinomio cúbico, propiedad que pudiera favorecer el adaptarse con mas facilidad con algún tipo de relieve.

Resultados del cálculo con el MDT bicúbico.

Relieve Llano			
Coordenadas	Cotas	Cotas calculadas	ΔZ

X	Y	del mapa (Z)	Matriz no densificada Z_1	Matriz densificada Z_2	Z_1-Z	Z_2-Z
186700	270110	34.00	33.97	34.02	-0.0300	0.0200
186630	270200	36.00	35.58	35.58	-0.4200	-0.4200
186970	270050	36.00	34.77	35.79	-1.2300	-0.2100
186720	270420	48.00	47.48	47.22	-0.5200	-0.7800
186750	270380	47.00	46.79	46.83	-0.2100	-0.1700
186860	270400	49.00	48.70	48.84	-0.3000	-0.1600
186720	270610	43.00	47.59	47.82	4.5900	4.8200
186530	270650	63.00	63.06	63.03	0.0600	0.0300
186920	270840	49.00	48.33	48.42	-0.6700	-0.5800
186580	270870	72.00	72.04	71.83	0.0400	-0.1700
186530	270040	35.00	34.72	34.66	-0.2800	-0.3400
186540	270270	40.00	39.74	39.84	-0.2600	-0.1600
186930	270370	40.00	39.64	39.66	-0.3600	-0.3400
186940	270070	35.00	35.37	35.27	0.3700	0.2700
186820	270060	31.50	33.26	32.87	1.7600	1.3700
186830	270370	49.00	48.02	47.92	-0.9800	-1.0800
186740	270470	45.00	44.47	44.77	-0.5300	-0.2300
186640	270560	50.00	49.67	49.40	-0.3300	-0.6000
186620	270860	70.00	69.66	68.84	-0.3400	-1.1600
186580	270780	65.00	64.45	65.16	-0.5500	0.1600
186960	270950	50.00	50.58	48.17	0.5800	-1.8300
186770	270670	47.50	47.81	47.70	0.3100	0.2000
186880	270270	37.50	36.52	36.49	-0.9800	-1.0100
186770	270580	47.50	46.93	46.36	-0.5700	-1.1400
186700	270740	50.00	50.50	50.48	0.5000	0.4800
186570	270920	70.00	68.59	68.71	-1.4100	-1.2900
186520	270980	75.00	70.34	70.01	-4.6600	-4.9900
186640	270370	45.00	45.30	45.66	0.3000	0.6600
186920	270230	35.00	35.18	35.79	0.1800	0.7900
186700	270260	40.00	39.83	39.83	-0.1700	-0.1700

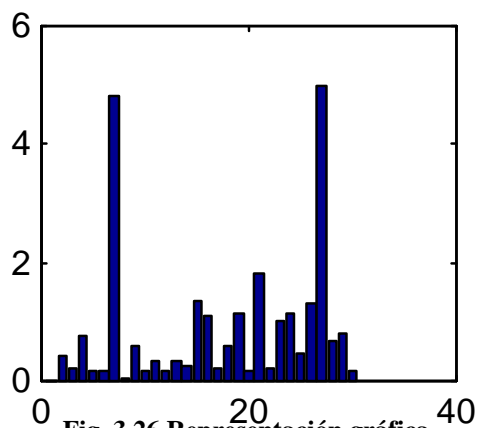


Fig. 3.26 Representación gráfica del módulo error absoluto obtenido con la matriz redensificada.

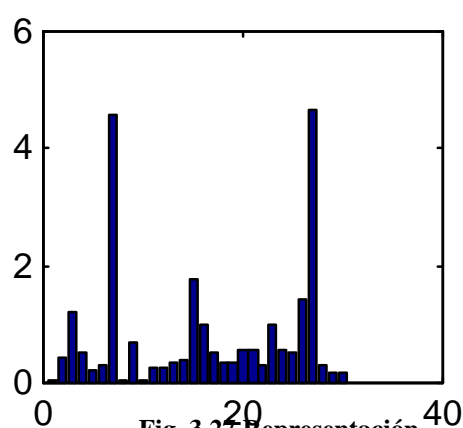


Fig. 3.27 Representación gráfica del módulo error absoluto obtenido con la matriz no densificada.

Relieve Ondulado						
Coordenadas		Cotas del mapa (Z)	Cotas calculadas		ΔZ	
X	Y		Matriz no densificada Z_1	Matriz densificada Z_2	Z_1-Z	Z_2-Z
187440	268720	125	125.35	125.29	0.3500	0.2900
187590	268770	129.5	129.90	129.96	0.4000	0.4600
187430	268530	123	122.09	122.32	-0.9100	-0.6800
187390	268800	116.5	118.22	118.02	1.7200	1.5200
187880	268530	118	118.24	118.41	0.2400	0.4100
187640	268690	133.5	133.61	133.75	0.1100	0.2500
187880	268780	133.5	131.03	131.03	-2.4700	-2.4700
187740	268160	108.5	107.81	108.32	-0.6900	-0.1800
187240	268610	107.5	104.26	104.34	-3.2400	-3.1600
187030	268920	107.5	101.22	108.92	-6.2800	1.4200
187050	268820	101	101.93	101.93	0.9300	0.9300
187550	268440	122	121.33	121.10	-0.6700	-0.9000
187570	268960	136	139.69	135.59	3.6900	-0.4100
187840	268910	138.5	130.76	137.05	-7.7400	-1.4500
187070	268000	109	108.42	108.86	-0.5800	-0.1400
187920	268100	118.5	109.51	117.05	-8.9900	-1.4500
187570	268140	92	95.34	92.90	3.3400	0.9000
187440	268210	113.5	109.87	109.73	-3.6300	-3.7700
187080	268610	103	104.76	105.41	1.7600	2.4100
187600	268560	121.5	120.73	120.85	-0.7700	-0.6500
187360	268000	94.5	95.10	94.86	0.6000	0.3600
187300	268100	98	95.00	97.2	-3.0000	-0.8000
187570	268140	92	95.34	92.91	3.3400	0.9100
187390	268090	96.5	94.33	94.13	-2.1700	-2.3700
187180	268650	112	107.39	108.33	-4.6100	-3.6700
187340	268920	132	125.47	131.87	-6.5300	-0.1300
187220	268050	101	98.11	98.62	-2.8900	-2.3800
187120	268300	109	110.06	109	1.0600	0
187620	268310	109	106.61	109.40	-2.3900	0.4000
187650	268860	128.5	128.86	128.87	0.3600	0.3700

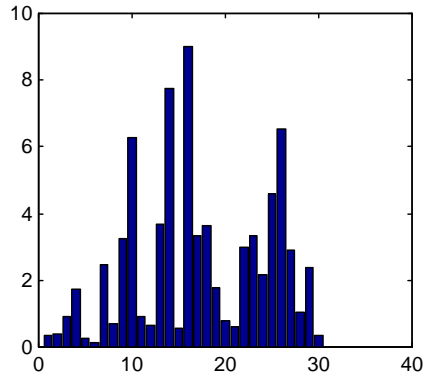


Fig. 3.28 Representación gráfica del módulo error absoluto obtenido con la matriz no densificada.

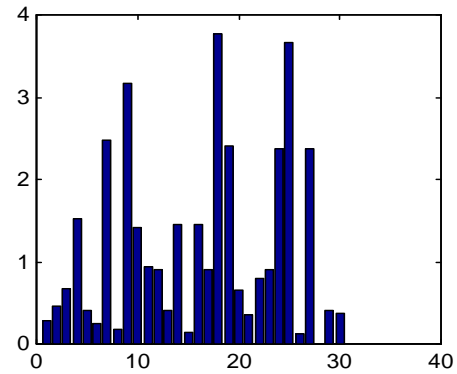


Fig. 3.29 Representación gráfica del módulo error absoluto obtenido con la matriz redensificada.

Relieve Montañoso						
Coordenadas		Cotas del mapa (Z)	Cotas calculadas		ΔZ	
X	Y		Matriz no densificada Z_1	Matriz densificada Z_2	Z_1-Z	Z_2-Z
190070	268300	203.5	203.35	203.20	0.1500	0.3000
190100	268500	253.5	250	250.00	-3.5000	-3.5000
190150	268840	168.5	167.60	167.56	-0.9000	-0.9400
190240	268730	178.5	174.89	175.08	-3.6100	-3.4200
190080	268950	174	173.17	173.31	-0.8300	-0.6900
190100	268520	253.5	248.50	249.21	-5.0000	-4.2900
190360	268340	223	223.43	223.14	0.4300	0.1400
190430	268130	192	190.23	191.74	-1.7700	-0.2600
190430	268060	198	195.05	194.20	-2.9500	-3.8000
190530	268440	149.5	149.47	148.54	-0.0300	-0.9600
190430	268230	198	200.20	204.31	2.2000	6.3100
190430	268540	158	157.79	158.81	-0.2100	0.8100
190480	268710	178.5	174.40	176.85	-4.1000	-1.6500
190320	268750	171	170.72	170.61	-0.2800	-0.3900
190160	268950	175	176.78	175.36	1.7800	0.3600
190060	268430	225	222.61	223.64	-2.3900	-1.3600
190170	268730	175	173.11	173.36	-1.8900	-1.6400
190220	268770	170	167.41	168.25	-2.5900	-1.7500
190670	268700	250	275.04	258.10	25.0400	8.1000
190230	268225	200	199.76	200.84	-0.2400	0.8400
190320	268250	195	196.34	195.57	1.3400	0.5700
190250	268340	225	226.93	226.47	1.9300	1.4700
190690	268610	250	267.88	253.16	17.8800	3.1600

190570	268805	225	231.60	232.23	6.6000	7.2300
190320	268880	175	175.76	175.09	0.7600	0.0900
190040	268500	250	249.58	249.39	-0.4200	-0.6100
190500	268640	175	178.27	177.93	3.2700	2.9300
190340	268320	220	224.90	218.71	4.9000	-1.2900
190340	268030	180	181.45	182.58	1.4500	2.5800
190070	268120	225	192.22	208.4	-32.7800	-16.6000

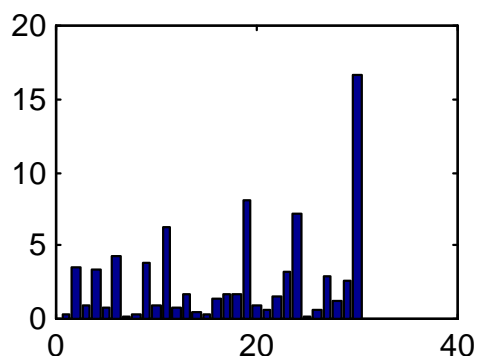


Fig. 3.30 Representación gráfica del módulo error absoluto obtenido con la matriz redensificada.

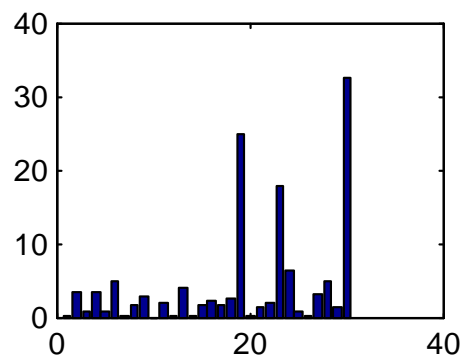


Fig. 3.31 Representación gráfica del módulo error absoluto obtenido con la matriz no densificada.

3.4- Análisis de los errores.

Con la finalidad de conocer si existe diferencia entre los modelos a usar para las condiciones en las que se trabajó para los diferentes tipos de terreno se efectuó la prueba no paramétrica Kuskal-Wallis (H), después de haber comprobado mediante la prueba Kolmogorov-Smirnov con un nivel de significación $\alpha=0.05$, que las variables no seguían una distribución normal.

	Z Llano	Z Ondulado	Z Montañoso
H	H=0.118	H=0.239	H=0.336
	gl=6	gl=6	gl=6
	p=1.000 ^{n.s}	p=1.000 ^{n.s}	p=0.999 ^{n.s}

A partir de los resultados de la prueba para cada uno de los terrenos se infiere que no hay diferencia estadísticamente significativa entre los modelos utilizados lo cual queda demostrado en los valores de probabilidad.

En las tablas donde se recogen los resultados de los modelos en los diferentes tipos de terreno, las dos últimas columnas corresponden respectivamente a los errores absolutos cometidos al interpolar con los diferentes modelos sobre la matriz de los datos sin densificar y densificada, los signos indican si el valor de la cota calculada esta por encima (+) y por debajo (–) de la cota tomada del mapa.

$$e_{sd} = Z_1 - Z : \text{Error absoluto, matriz sin densificar.} \quad (3.5)$$

$$e_d = Z_2 - Z : \text{Error absoluto, matriz densificada.} \quad (3.6)$$

El error medio de los 30 puntos de control en ambos casos se calcula:

$$e_{sd} = \frac{\sum_{i=1}^{30} e_{sd}}{n} \quad (3.7) \quad \text{y} \quad e_d = \frac{\sum_{i=1}^{30} e_d}{n} \quad (3.8)$$

En el siguiente cuadro se recogen los resultados de estos errores medios en cada uno de los tipos de relieve y con cada variante de modelo.

MODELO	TERRENO					
	Llano		Ondulado		Montañoso	
	No densificada	Densifica	No densificada	Densifica	No densificada	Densifica
Bilineal	1.0587	0.9670	1.8587	2.3997	3.4867	2.5200
Bicuadrático	1.2810	0.8853	1.3977	1.1747	2.1727	2.6017
Bicúbico	0.7870	0.8543	2.5153	1,1747	4.3740	2.6013

Como se puede ver para 30 puntos de muestra en el terreno llano el error menor es con el modelo bicúbico sin densificar, este modelo a pesar de depender de ecuaciones bicúbicas es de buena aproximación y aunque se podía suponer que el bilineal se ajustara mas no se debe olvidar que la ecuación bilineal es un caso particular de la bicúbica o sea un polinomio bicúbico puede ser bilineal e inclusive lineal o constante si los puntos de interpolación están dispuestos de forma que así sea.

En el terreno ondulado la mejor aproximación está en los modelos bicuadrático y bicúbico densificado, resultado que era de esperar, destacando como cosa curiosa la congruencia de los errores medios en el modelo bicuadrático y bicúbico.

Para el montañoso el de más precisión resulta el bicuadrático sin densificar aunque las diferencias entre el bicuadrático y el bicúbico densificados no es notable, se debe destacar además el hecho del mejoramiento de los resultados cuando se procede en el modelo bicúbico a redensificar la matriz.

CAPITULO IV: Aplicaciones forestales.

4.1- Cálculo de la altura del arbolado.

Parte del objetivo a lograr en esta investigación, consiste en lograr calcular la altura del arbolado por su importancia para el aprovechamiento forestal Para cumplir con el cálculo de tan importante parámetro nos valem de varias

técnicas, que con el concurso del ordenador, hoy día, se hace posible utilizar, entre estas están: el método fotogramétrico y el modelo digital del terreno.

Es importante destacar que las fotos aéreas van a estar involucradas en nuestro propósito, conocemos lo que se hace de forma usual para lograr la altura de un árbol mediante el uso de estas. Haciendo mediciones sobre fotos aéreas se puede calcular la altura del arbolado mediante el uso de algún instrumento fotogramétrico, en particular estereorrestituidores, si se mide la cota de la copa del árbol y se ve alguna porción del terreno que se encuentre cerca del árbol, de manera que se pueda determinar también la cota de algún punto sobre esta porción del terreno, basta calcular la diferencia de las cotas, para esta, asumirla como altura del árbol, haciéndose el problema mas sencillo si el bosque es artificial, de forma tal que los arboles tienen el mismo tiempo de vida y su desarrollo no es tan diferenciado, y por lo general una visibilidad mayor sobre la superficie terrestre, favoreciendo así el procedimiento comentado.

El problema está en que si el área de interés corresponde a un bosque natural, y no se cuenta con fotografías a escalas muy grande, por lo general en estos casos no se observa el terreno y los arboles se diferencian en su edad e inclusive su especie, este es el caso mas complejo. Tomando la posibilidad de usar un estereorrestituidor fotogramétrico, y poder determinar la cota y coordenadas planimétricas de la copa de un árbol , con el empleo de un MDT, se puede determinar la cota del pie del árbol evaluando las coordenadas planimétricas de la copa en el MDT y así por diferencia de las cotas obtenidas por medición y por interpolación tener la altura del mismo, sin que el técnico observe la superficie terrestre, esto se hace en una muestra representativa del área, para mas tarde con un tratamiento estadístico, determinar la altura del arbolado en el área en cuestión, utilizando procedimientos habituales del inventario forestal.

A continuación, presentaremos a modo de ejemplo un caso particular donde se calcula la altura de una majagua procedente de un bosque natural, sobre un terreno ondulado, mediante la medición fotogramétrica se obtienen las coordenadas (x, y, z) de la copa:

(187 440, 268 720, 142) evaluando las coordenadas planimétricas

(187 440, 268 720) en el modelo digital apropiado, se obtiene la cota (125), al efectuar la diferencia entre la cota de la copa y la obtenida por interpolación se obtiene la altura del árbol.

$z = \text{bicubic}(187440, 268720, \text{res})$

$z =$

125.2926

» 142-125.2926

ans =

16.7074

Este valor puede ser aproximado teniendo en cuenta sus cifras significativas.

4.2- Procedimiento propuesto para el trazado en planta del eje de un vial.

Elementos fundamentales del trazado para viales forestales.

Un trazado óptimo de un vial forestal es aquel que se adapta económicamente a la topografía del terreno y permite ejecutar las actividades propias del aprovechamiento forestal, la silvicultura y la protección del bosque con la mayor factibilidad así como lograr una construcción de la obra con mínimos costos. Sin embargo, la solución de un trazado y su adaptabilidad al terreno dependen en gran medida de los criterios de diseños geométricos adoptados.

Los diseños dependen fundamentalmente de la intensidad del tráfico prevista y de las características técnicas de los vehículos. El anteproyecto deberá lograr un equilibrio entre alienaciones y pendientes que permita la construcción de la vía con el menor movimiento de tierra posible y con la mejor compensación posible entre los volúmenes de desmonte y terraplén.

Para cumplir con los últimos objetivos económicos y de seguridad en el proyecto de la vía, el proyectista debe basarse en varios elementos fundamentales para el diseño geométrico y con mayor razón, si se trata de viales forestales, debido a que deben asociarse a criterios ecológicos y criterios que favorezcan un buen desarrollo de la actividad de manejo y aprovechamiento del área.

Con el objetivo que los vehículos circulen con seguridad es necesario:

1. Que las curvas cumplan con el radio mínimo y el peralte conveniente.

Existen varios criterios para determinar el radio mínimo que puede tenerse en cuenta en una curva horizontal. Veremos el criterio de estabilidad lateral utilizado al transitar el vehículo a su velocidad de diseño.

$$R = \frac{V^2}{127.14(E_{max} + \mu T)} \quad (4.1)$$

Donde:

R: radio mínimo de la curva (m).

V: velocidad de diseño de la vía (km/h).

E_{max}: peralte máximo admisible por la norma o instrucciones de cada país (m/m). (En la norma cubana NC 53-126: 1984 E_{max}=0.06 m/m).

μT: coeficiente de fricción lateral entre los neumáticos y la superficie de la vía.

Se puede ver en la formula anterior el coeficiente de fricción lateral es inversamente proporcional al radio mínimo de la curvatura y puede adoptarse los siguientes valores para su evaluación en la determinación de (R) en el caso de caminos forestales.

V(km/h)	70	60	50	40	30	20	15	10
μT	0.15	0.16	0.17	0.17	0.18	0.18	0.18	0.19

2. Los caminos forestales deben ser trazados de modo que se inscriban en el relieve del terreno. Ello conduce a ejes con un mayor número de curvas pero se reduce el volumen de tierra a mover y por lo tanto el impacto ambiental. Al seleccionar el trazado sobre un mapa topográfico lo anterior se traduce en localizar el eje del vial siguiendo la tendencia de las curvas de nivel, como se lustra en el ejemplo de la **figura 4.1**.

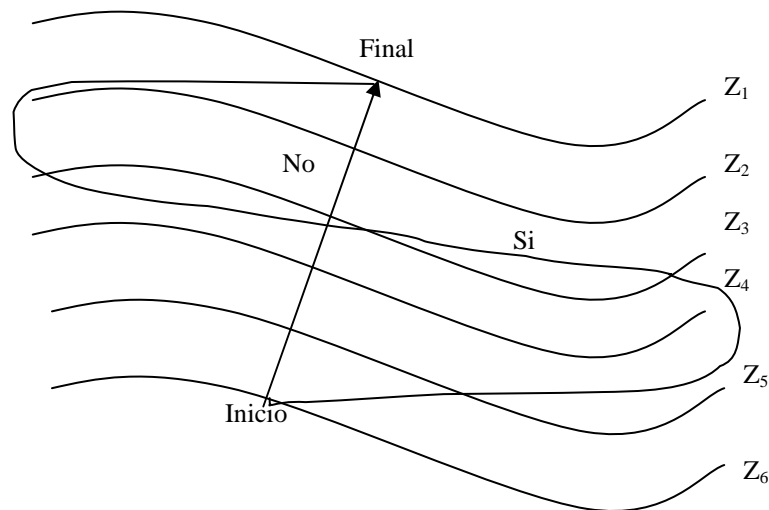


Figura 4.1 Trazado en planta mas conveniente.

3. Que en el trazado exista una adecuada coordinación planta-perfil, sobre todo en caminos principales para evitar efectos indeseados en la conducción de los vehículos.

En este sentido un aspecto importante es la recomendación de alejar suficientemente las curvas horizontales de las verticales para permitir una adecuada visibilidad o en caso contrario incluir la curva vertical dentro del desarrollo de la curva horizontal. Pueden también asociarse criterios de trazados geométricos en armonía con el estado natural del terreno por donde se va a proyectar la vía (Tchikoué 1996).

Concretamente debe valorarse la influencia de la pendiente ya que al aumentar su valor da lugar a los siguientes efectos:

- Produce un aumento del consumo de combustible.
- Da lugar a un mayor desgaste de neumáticos y piezas.
- Otros.

El proyectista debe auxiliarse de las normas que establecen las regulaciones en cuanto a los valores de las pendientes máxima y mínima así como la longitud máxima con la pendiente máxima de la rasante a proyectar.

Procedimientos metodológicos empleados en los trazados forestales.

Los métodos empleados tradicionalmente para el trazado en planta de viales forestales principales constan generalmente de las siguientes etapas:

- Reconocimiento de la línea de deseo del terreno.
- Selección de los tramos rectos y ubicación de los puntos de inflexión (PI) de las curvas horizontales.
- Medición de los ángulos de inflexión (Δ) en los (PI) y longitudes de los tramos rectos.
- Diseño geométrico de las curvas horizontales.
- Replanteo de las curvas y los tramos rectos.

Esto origina trazados muy rígidos en los que se dificulta lograr caminos de bajo impacto ambiental

Con vistas a agilizar y simplificar las tareas del diseño geométrico de los elementos anteriormente mencionados se ha confeccionado un conjunto de software que responden a una concepción general de las tres fases.

- Reconocimiento y obtención de informaciones primarias de la zona. Esta tarea podrá efectuarse mediante levantamiento topográfico de campo, mediciones sobre mapas topográficos o mediciones fotogramétricas.
- Representación en tres dimensiones del relieve y diseños de la línea de deseo sobre una plantilla de isocotas (curvas de nivel) y la obtención de las coordenadas planimétricas y radios de curvatura de todos los puntos sobre la línea a una equidistancia de 20m.
- Dibujo del perfil longitudinal del eje del vial que parte de los datos altimétricos del eje de la vía, con la posibilidad del trazado de la rasante.
- Representación del eje del vial diseñado en una plantilla de isopendientes con el objetivo de valorar las pendientes en el entorno del vial como elemento de juicio para planificar las tecnologías de aprovechamiento y manejo.

La ventaja que brinda este módulo automatizado está en la posibilidad de diseñar curvas sobre una plantilla de isocotas con decisiones que estén sujetas a la topografía del terreno, la curvatura y la pendiente dando la posibilidad de rediseñar el eje, en un tiempo muy corto, con una evaluación de todos los parámetros antes mencionados, de manera que el nuevo diseño responda a las normas técnicas exigidas.

Permite además una salida gráfica por impresora o en el videoterminal. Los programas están confeccionados sobre MATLAB, lo que posibilita el trabajo con matrices, con herramientas matemáticas útiles en el cálculo de algunos parámetros complementarios que el usuario desee y presenta posibilidad gráfica tanto en el plano como en el espacio.

Procedimiento propuesto para el trazado en planta del eje de un vial.

Atendiendo a los requerimientos de las actividades forestales en cuanto a la elección del eje para las vías de transporte terrestre se propone la selección de un Trazado a Mano Alzada en el que el proyectista elige y traza un conjunto de puntos del eje deseado marcándolos con el mouse sobre una plantilla de isocotas representada en el videoterminal. Dicho eje, el que posee la cualidad de ser continuo en segunda y primera derivada en todo el dominio en que esta definido, ofrece una suavidad en toda su trayectoria. La computadora se encarga de calcular las coordenadas planimétricas (x , y) de las estaciones cada 20m y los radios de curvatura de estas, además se brinda la opción de evaluar el eje diseñado sobre una plantilla de isopendientes, dando la posibilidad de rediseñar con rapidez y corregir alguna violación de los parámetros técnicos exigidos.

Como se muestra en la **figura 4.2** el eje del vial trazado a mano alzada sobre la plantilla de isocotas conserva una suavidad en toda su trayectoria, esto responde a la continuidad en primera y segunda derivada impuesta a la función usada que no es mas que una función spline paramétrico cúbico.

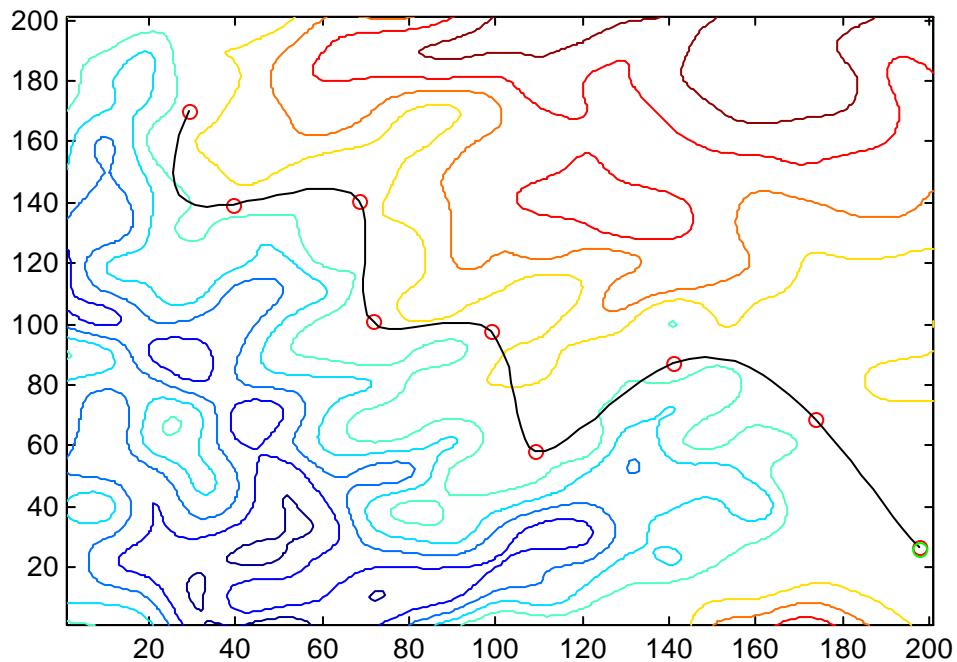


Fig 4.2 Eje trazado a mano alzada sobre el relieve en proyecto.

Simultaneamente en la ventana de edición aparecen 2 matrices, la primera tiene 3 columnas, a la columna 1 corresponden a los valores del parametro t que generan las cordenadas (x, y) de los puntos sobre el eje del vial cada 20m, a la 2 y la 3 las cordenadas de los puntos mencionados anteriormente. La segunda matriz tiene 2 columnas, el contenido de la primera columna es el mismo que el de la anterior matriz o sea la variacion de t por estaciones, pero la segunda corresponde al radio de curvatura en cada una de los puntos equidistantes a 20m.

Si al revisar los radios de curvatura en las estaciones calculadas existe en algún caso radios muy pequeños que excedan las normas de diseño del vial, entonces se rediseñará el camino moviendo en la plantilla de isopendientes el punto o los puntos de forma conveniente hasta que todos los datos calculados de forma automatica por el ordenador cumplan con las normas.

Veamos una pequeña muestra de la primera y segunda matriz tal como se ve al correr el programa:

<i>t</i>	<i>x</i>	<i>y</i>
1.0000	29.1106	170.1803
1.0922	29.3607	166.1882
1.1858	29.6506	162.1988
1.2822	30.0262	158.2165

ans =

1.0e+003 *

<i>t</i>	<i>r</i>
0.0011	0.4057
0.0012	0.1886
0.0013	0.1106
0.0014	0.0682
0.0015	0.0412
0.0016	0.0232

La primera matriz refleja las coordenadas planimétricas de los puntos sobre el eje del vial cada 20m (estaciones), la segunda matriz refleja los radios de curvatura de cada estación se debe destacar que el parámetro *t* es la referencia para adjudicarle a un punto de coordenadas (*x*, *y*) un radio de curvatura determinado, o sea, esta columna es común en las dos matrices para este fin. Se hace necesario comentar cómo se le dio solución desde el punto de vista matemático al cálculo de los coordenadas de los puntos equidistantes a 20m y al radio de curvatura.

En el primer caso se empleó una interpretación geométrica muy sencilla de la integral definida, el cálculo de la longitud de un arco de curva plana dada por su

ecuación vectorial:
$$L_c = \int_a^b \sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2} dt$$

Parece razonable aceptar que el problema a resolver nos conduciría sin

remedios a la solución de una ecuación integral del tipo:
$$\int_a^x \sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2} dt - 20 = 0$$

El cálculo para obtener la solución se debe comenzar a partir del origen de la curva paramétrica, la primera ecuación corresponderá a la primera distancia igual a 20m y de forma recurrente se originaran tantas ecuaciones a resolver como tramos de esta longitud se obtenga sobre la curva, al obtener el valor de la incógnita *x* es claro que sustituyendo en $\alpha_{(t)}$ y $\beta_{(t)}$ se obtiene las coordenadas (*x*, *y*) del punto a 20m. Para resolver la integral se empleó el

método de Simpson y para la ecuación el de bisección, ambos métodos numéricos muy sencillos de programar en MATLAB.

Para calcular el radio de curvatura se usó una fórmula que permite determinar la curvatura de una función dada en forma paramétrica, donde la curvatura va a ser el recíproco del radio o sea a mayor radio menor curvatura y viceversa en caso contrario:

$$K = \frac{1}{R} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{((x')^2 + (y'')^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.2)$$

Después de haber terminado el diseño en planta del eje del vial se puede dibujar el perfil de dicho eje evaluando en el MDT conveniente las coordenadas (x , y) de las estaciones a 20m. Para esto empleamos una función de interpolación segmentaria spline cúbico natural, función que garantiza la continuidad en primera y segunda derivadas lo que origina una suavidad en todo el dominio sobre el que se definirá.

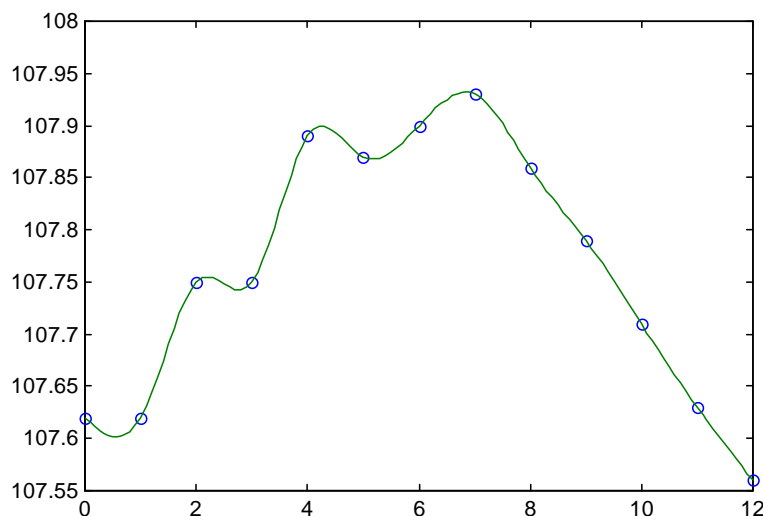


Fig 4.3 Perfil del eje del vial trazado a mano alzada sobre el relieve en proyecto.

Nuestro interés de utilizar el spline consiste en usar funciones interpoladoras lo menos curvadas posible. Demostraremos que nuestra función cumple con esta condición.

Si disponemos de una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, 2 veces diferenciable en un punto de abscisa $x \in [a, b]$. Su curvatura viene dada por la expresión:

$$\frac{1}{R} = \frac{|f''_{(x)}|}{[1 + (f'_{(x)})^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Si consideramos la curvatura pequeña, estamos concibiendo el radio de curvatura R grande lo que deriva en valores muy pequeños de la derivada en cualquier punto sobre la curva, de aquí que si $f'_{(x)}$ es pequeño con respecto a 1, entonces la curvatura estará dada por el módulo de la segunda derivada

$$|f''_{(x)}| \text{ y la curvatura promedio en el intervalo viene dada por: } \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f''_{(x)} dx$$

así, para justificar el carácter de mínima curvatura de los spline frente a otras posibles curvas interpolantes, debemos probar la siguiente proposición que es corolario del teorema que dice:

Teorema: Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathfrak{R}$ con derivada segunda continua y sea $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} < x_n = b$ una partición de (a, b) . Sea $s : (a, b) \rightarrow \mathfrak{R}$ con $s'_{(a)} = f'_{(a)}; s'_{(b)} = f'_{(b)}$ el único spline existente.

Sea $u : (a, b) \rightarrow \mathfrak{R}$ con derivada segunda continua una función satisfaciendo

$$u_{(z_i)} = f_{(z_i)}, i = 0, 1, 2, \dots, n; u'_{(a)} = f'_{(a)}; u'_{(b)} = f'_{(b)}$$

$$\text{Entonces } \int_a^b (u''_{(x)})^2 dx \geq \int_a^b (s''_{(x)})^2 dx$$

Este teorema es corolario de la siguiente proposición.

Proposición

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ una función con derivada segunda continua y sea $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ una partición de $[a, b]$. Si $S : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ con $s'_{(a)} = f'_{(a)}; s'_{(b)} = f'_{(b)}$, es el único spline, entonces.

$$\int_a^b (f''_{(x)})^2 dx - \int_a^b (s''_{(x)})^2 dx = \int_a^b (f''_{(x)} - s''_{(x)})^2 dx$$

Demostracion:

$$\int_a^b (f''_{(x)} - s''_{(x)})^2 dx = \int_a^b (f''_{(x)})^2 dx - \int_a^b (s''_{(x)})^2 dx - 2 \int_a^b s''_{(x)} (f''_{(x)} - s''_{(x)}) dx \quad (4.3)$$

Integrando por partes. Tomando convenientemente:

$$u = s''_{(x)} \quad du = s'''_{(x)} dx$$

$$dv = (f''_{(x)} - s''_{(x)}) dx \quad \text{de donde se obtiene,} \quad v = (f'_{(x)} - s'_{(x)})$$

$$\int_a^b s''_{(x)} (f''_{(x)} - s''_{(x)}) dx = s''_{(x)} (f'_{(x)} - s'_{(x)}) \Big|_a^b - \int_a^b s'''_{(x)} (f'_{(x)} - s'_{(x)}) dz \quad (4.4)$$

$$s''_{(x)} (f'_{(x)} - s'_{(x)}) \Big|_a^b = 0 \quad \text{dado por hipótesis:}$$

$$s'_{(a)} = f'_{(a)}; s'_{(b)} = f'_{(b)} \quad \text{hipótesis}$$

y como $s'''_{(x)}$ es una función constante en cada (x_j, x_{j+1}) debido a que el spline es un polinomio cúbico, digamos α_j

$$\sum_0^n \alpha_j \int_{x_j}^{x_{j+1}} (f'_{(x)} - s'_{(x)}) dx = \alpha_j (f_{(x)} - s_{(x)}) \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} = \alpha_j ((f_{(x_{j+1})} - s_{(x_{j+1})}) - (f_{(x_j)} - s_{(x_j)})) = 0 \quad (4.5)$$

$$\text{pues } s_{(x_i)} = f_{(x_i)}; i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Procedimiento para evaluar la pendiente en un relieve dado.

Como factor de interés en la ordenación y aprovechamiento del bosque se encuentra el poder disponer de información relativa al comportamiento de la pendiente del relieve, por lo que en esta investigación se elaboró un modelo que nos posibilitara determinar la pendiente máxima de forma puntual y su evaluación a través de una plantilla de isopendientes.

En primer lugar explicaremos que definimos como pendiente máxima puntual: Sabemos que el dominio sobre el que definimos nuestros MDT son mallas rectangulares y regulares, de estas mallas conocemos las coordenadas (x,y,z) correspondientes a sus nodos.

Mediante la derivada direccional aproximada

$$\approx \frac{f(i+h, j+h) - f(i, j)}{\sqrt{h^2 + h^2}} \quad (4.6)$$

podemos calcular la pendiente máxima de cada uno de esos nodos y en todas las direcciones posibles en su vecindad considerando como máxima pendiente la derivada direccional de mayor valor absoluto a este valor es lo que llamamos

pendiente máxima puntual. Mediante un programa se puede tener la pendiente máxima de cualquier punto de la red.

Se presentara una muestra en el siguiente ejemplo:

```
» pen(105,104)
```

```
ans =
```

```
9.6806
```

Conociendo todas las pendientes máximas en todos los nodos de la red se puede obtener una plantilla de isopendientes en la que el técnico puede hacer valoraciones de las operaciones en función de la pendiente del terreno. Sobre esta plantilla es posible diseñar también al igual que en la plantilla de isocotas el eje del vial atendiendo a las normas técnicas en función del parámetro pendiente.

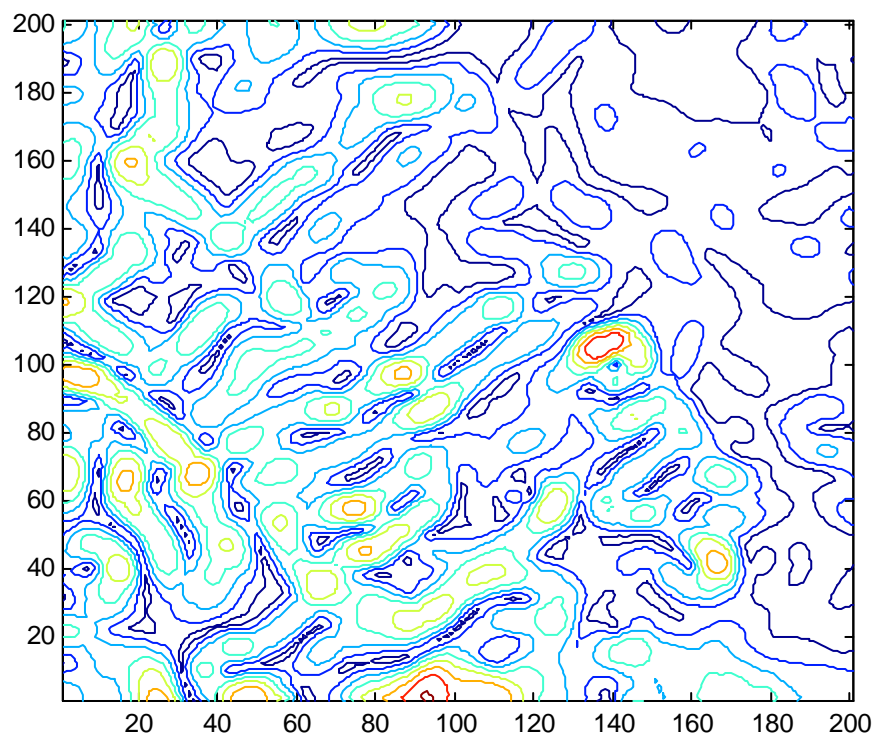


Fig 4.4 Plantilla de isopendiente correspondiente al relieve montañoso.

Conclusiones y Recomendaciones.

Conclusiones:

El análisis de los resultados del trabajo investigativo desarrollado y expuesto en la presente tesis permitió arribar a las siguientes conclusiones y recomendaciones:

- 1) Se hicieron tres MDT diferenciándose en las ecuaciones de interpolación empleada en cada uno de ellos y en sus dominios de definición.
- 2) Se evaluaron los MDT contruidos en los tres tipos de terreno posible llano, ondulado y montañoso, llegando a conclusiones cualitativas de cada uno de ellos por tipo de relieve y característica del dominio de definición.
- 3) Se brinda un sistema automatizado para la realización de las tareas básicas de cálculos y dibujo que permiten un adecuado dialogo proyectista-ordenador en el campo de los proyectos viales forestales. Exponiéndose las soluciones desarrolladas para el trazado a mano alzada del eje de un vial usando funciones spline paramétrico que ha contribuido exitosamente a ofrecer flexibilidad al proyectista para elegir el eje de la vía. Con ello lógicamente deben disminuirse las afectaciones al bosque y facilitar el transporte, manejo y construcción de la vía como consecuencia de búsqueda de la adaptabilidad del trazado al relieve del terreno y a satisfacer los requerimientos propios del trazado forestal.
- 4) En el trazado del eje del vial es posible mediante la solución de ecuaciones integrales obtener las coordenadas planimétricas de las estaciones sobre el eje cada 20m y su radio de curvatura, aspectos de vital importancia a la hora del replanteo del vial y las consideraciones de las normas técnicas en el mismo.
- 5) Se puede obtener una plantilla de isopendientes de manera que el proyectista pueda valorar estas con fines ingenieros tanto en el trazado de viales como en otras actividades forestales.
- 6) Finalmente, los resultados de estos trabajos han sido probados con ejemplos prácticos y parte del mismo a sido publicado en eventos internacionales de matemática y ciencias forestales.

Recomendaciones:

Después de la valoración de los distintos MDT usados en esta investigación recomendamos que el uso de los mismos por tipo de terreno respondan a los análisis estadísticos y de errores que se hicieron en el epigrafe 3.4 del capítulo IV.

Deben estudiarse los procedimientos empleados en la presente tesis para evaluar la posibilidad de la introducción de sus resultados en la esfera productiva, científica y de educación superior de pre y Postgrado.

REFERENCIAS

1. Álvarez, B. M.: Técnicas de aproximación de funciones. I.S.P.J.A.E.
2. Addo, E.: Estudio sobre mediciones de perfiles longitudinales empleando el modelo digital simplificado del terreno con datos obtenidos por procedimiento de campo. Pinar del Río. Trabajo de diploma para optar por el título de ingeniero forestal. C.U.P.R. 1989
3. Agatawal, C.: Accuracy of spot heights and determination of minimum cost on interval for plotting. Helsinki XX International Congress for photogrammetry. 1976.
4. Ayeni, O.O.: Considerations for Automated Digital Terrain Model With Application in Differential Photo Mapping. Ph.D. Thesis, Ohio State University. 1976.
5. Bada, A. G.: El modelo digital del terreno: Desarrollo histórico y perspectivas de aplicación a los proyectos viales en Cuba. La Habana. V Conferencia Científica de Ingeniería y Arquitectura. I.S.P.J.A.E. 1984.
6. Blasche, W.: Problems in obtaining and processing of photogrammetric data for digital terrain model. Invited paper X International Congress of Photogrammetry July 1968
7. Benítez, O. R.: Topografía para ingenieros civiles. Tomo I y II. La Habana. Editorial Pueblo y Educación. 1978.
8. Benítez, O. R.: Trazado de vías. La Habana. Editorial I.S.P.J.A.E. 1986 486p.
9. Benner, E; Schult, R.: Report on digital terrain model. Ottawa. XIIIth Congress of Photogrammetry. Institute III for geodesy. University of Stuttgart. 1972 10p.
10. Brunet, P.: La interpolación con funciones spline. Introducción automática de las condiciones de extremo. *Questió*.(1). 1980 p(1-60).
11. Coffi, A.: El modelo digital del terreno y sus aplicaciones forestales. Pinar del Río. Trabajo para optar por el título de ingeniero forestal. C.U.P.R. 1986.
12. Curtis, F. Gerald: Análisis Numérico. Alfaomega. 1990 p(201-545).
13. Diseño Geométrico De Caminos Forestales. Comité Estatal de Normalización. La Habana. 1984.
14. Doyle, J.F.: Digital terrain model: An Overview. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing* Vol 44 No 12. 1978 p(1841-1845).
15. Erwin Kreyszig: Matemáticas Avanzadas para Ingeniería Volumen II. Limusa. 1991 p(368-394).

16. Estévez Valdés Ignacio: Una Aplicación de Métodos Numéricos en la Ingeniería Civil. Tesis para optar por el Título de Master en Matemática Avanzada para Ingeniería. Ciudad Habana 1998 31p.
17. FAO: Planificación de carreteras forestales y sistema de aprovechamiento. Roma. FAO. Estudio Montes No. 2. 1978 169 p.
18. FAO: Sistema de información geográfica. Roma 1989 21 p.
19. García, R. S.: Aplicación de los modelos digitales del terreno en ingeniería civil. Tesis Doctoral. Madrid. 1994 299 p.
20. Gossar, T.W.: Aplicación of DTM. In the forest service. Photogrametric Engineering and Remote Sensing. Vol 44(12). 1978 p(1577-1586).
21. González, R. I; Torrecilla, O.A.: Estudio del spline cubico natural para la medición de perfiles longitudinales. Pinar del Río. Trabajo de diploma para optar por el título de ingeniero forestal C.U.P.R. 1992.
22. Hernandez, G.: Aplicación del Modelo Digital del Terreno al proyecto de intersecciones. Tesis Diploma. ISJAE. 1981.
23. Heggliis, S.: Un sistema gráfico interactivo para la topografia. Suiza. Wild Heerbrug. 1984 p(1-7).
24. Jancaitis, J.R.;Junkins, J.L.: Modeling irregular surfaces. Washington. JLIJ Consultants Report No 7102. 1972.
25. Jacobi, C.:Digital terrain model, point dnsity measurement, type of terrain and surveying expenses. 1981 p(361-366).
26. Jiménez, G. S.: Un modelo digital del terreno para la proyección de carreteras en Cuba. La Habana. Tesis para optar por el grado científico de doctor en ciencias técnicas I.S.P.J.A.E. 1990 158 p.
27. Jiménez, G. S, Tejeda, E.:Dos soluciones de la determinación de cotas mediante el Modelo Digital del Terreno. IV Conferencia de Ingeniería y Arquitectura. Ciudad de la Habana. Nov 1984 18p.
28. Jiménez, G.; Pérez, J. A.: Determinación de coordenadas por métodos digitales. La Habana. Revista de Ciencias Técnicas. Ingeniería en ciencias Geodésica y Geofísicas. No.1. 1977 p(37-46).
29. Jiménez, G.; Pérez, J. A.: Aplicación del Modelo Digital del Terreno a proyectos viales. Revista Ciencias Técnicas. Ingeniería en Geodesia y Cartografía. No 5. 1979 p(52-62).

30. Kudriáv'tsev, L.D.: Curso de Análisis Matemático Tomo I. Mir. Moscú. 1983 p(304-308).
31. Llanes, C.: Algoritmo para automatizar el diseño vial mediante la utilización del modelo digital del terreno. Tesis Diploma. ISPJAE. 1978.
32. Lemohtov, E.L.; Mttelman, Y.: The use of digital terrain model for automated relief drawing. URSS. National Committee of Photogrammetry of the URSS. 1978
33. Lehmann, H. C.: Geometría analítica. La Habana. Edición Revolucionaria. 1970 494p.
34. Lloyd, Pascal: Empleo del MDT. En la medición de alturas de árboles. Trabajo de Diploma. 1985.
35. Lopez-Cuervo, S.E.: Topografía. Madrid. Ediciones Mundi-Prensa. 1993 404 p.
36. Masson, D Autome: Surface modeling by means of an elastic grid. Amsterdam. Elsevier Scientific publishing Company. 1878 p(1-10).
37. Miller, C. L; Laflame, R. A.: The digital terrain model. Theory and application Photogrammetric Engineering. Vol. XXIV, No. 3. 1958 p(433-442).
38. Moya Magria, Juan, Moreno Martín Diego.: Problemas de Cálculo Infinitesimal y Teoría de Funciones. Marcombo S.A. Ediciones Técnicas de Boixareu Editores. 1969 p(625-627).
39. Moukoro, E.: Un sistema para el diseño de canales abiertos para la conducción y evacuación de agua. La Habana. Tesis para optar por el grado científico de doctor en ciencias técnicas. ISPJAE. 1992 97p.
40. Notario, A: Investigaciones sobre la planificación general de las redes camineras en los bosques de la República de Cuba con el empleo de métodos de Teledetección. Dresden. Dissertation A (Dr. rer. slv.), 1988. 191p.
41. Nuñez-G. Del P.A.; Valbuena, D.J.L.; Velasco, G.J.: GPS. La nueva era de la topografía. Madrid. Ediciones Ciencias Sociales. 1992 97p
42. Pérez Carreras, P.: Métodos matemáticos I. Servicio de Publicaciones Universidad Politécnica de Valencia; 1994 p(107 – 112).
43. Prodan Michail, Peters Roland, Cox Fernando, Real Pedro.: Mensura Forestal. Instituto Iberoamericano de Cooperación para la Agricultura (IICA). 1997 p(467-487).
44. Efros, A.: Física y Geometría del Desorden. Editorial M.I.R. Moscú. 1982 p(49-61).

45. Paihua, M.L.: Quelques méthodes numériques pour le calcul de fonctions splines à une et plusieurs variables. France. These pour obtenir le grade de docteur . Université Scientifique et medicale de Grenoble. 1982 120p.
46. Pérez, C. P.: Introducción al álgebra lineal. Vol. II, Valencia. Servicio de publicaciones. Universidad politécnica de Valencia. 1990 591 p.
47. Pinhas, Y.: Digital terrain models and their cartographic and cartometric utilization. The Cartographic Journal 20(1). June. 1983 p(17-22).
48. Raíces, V. O.: Fotogrametría para ingenieros civiles. La Habana. Editorial Pueblo y Educación. 1981 546p.
49. Samarski, A.A.: Introducción a los métodos numéricos. Editorial MIR. 1986 p(77-79).
50. Schut, G. H.: review of interpolation methods for digital models. Canada. The Canadian Surveyor Vol. 30N^o.5. 1976 p(389-411).
51. Siegel, S.: Diseño experimental no paramétrico. Edicion Revolucionaria. 1977p(69-215).
52. Suárez Alonso Margarita.: Matemática Numérica. Pueblo y Educacion. 1986 p(25-104).
53. TchiKoue, H; Estévez, I; Jiménez, G; Notario, A.: Una contribución al ajuste matemático de los trazados de los caminos forestales a mano alzada. Pinar del Río. IV Conferencia Científica del C.U.P.R. 1992.
54. TchiKoue, H; Notario, A.: Sistemas de programas para el cálculo automatizado de un trazado a mano alzada a partir de un levantamiento topográfico directo. Pinar del Río. V^{ta} Conferencia Científico-Técnica del MICONS-UNAICC. 1990
55. Thomas G. B.: Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica. Editorial Pueblo Nuevo. 1975 p(223-536).
56. Volkov, E. A.: Métodos numéricos. Moscú. Editorial Mir. 1992. 255 p.
57. Valdés Castro Concepción.: Análisis Matemático Tomo II. Pueblo y Educación. 1983 p(336-343).
58. Valdes, J.A.; Sánchez I. P.: Determinación de perfiles longitudinales en un MDT simplificado del terreno con datos obtenidos sobre un mapa topográfico. Pinar del Río. Trabajo Diploma para optar por el titulo de ingeniero forestal CUPR. 1987.
59. Williams, F.: Report on Terra. Presented paper in the XI International Congress of photos working group IV7V. 1968.
60. www.etsimo.uniovi.es/~feli/CursoMDT/CursoMDT.html, 2000.
61. www.intergraph.com/spain/soft/gis/mge/MgeModel.htm, 2000.

